ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

9

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1887.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

ACTA MATHEMATICA, 9. 1886/1887.

INHALT. — TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Pag. 7, l. 10,	au lieu de:	$\frac{x-a}{a}$	lire:	$-\frac{x-a}{a}$.
» 8, l. 5,	» » »	$a - a_{n+1}$	»	$a_n - a_{n+1}$.
» 8, l. 6,	» » »	$a_n - a_\nu$	»	$a_n - a_{\nu+1}$.
» 8, l. 18,	» » »	les intégrales du second membre	»	les intégrales.

SUR UNE EXTENSION À L'INFINI

DE

LA FORMULE D'INTERPOLATION DE GAUSS

PAR

I. BENDIXSON

À STOCKHOLM.

Etant donnée une fonction rationnelle entière $f(x)$ de la variable x de degré $n - 1$ laquelle remplit l'égalité

$$f(a_\nu) = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

la formule d'interpolation de Gauss,[1] nous donne la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = A_1 + A_2'(x - a_1) + A_3''(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_n^{(n-1)}(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})$$

où les quantités $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ sont formées d'après des lois très simples des quantités A_ν.

Je me suis demandé si on ne pouvait pas établir une formule analogue pour une fonction analytique quelconque, en supposant pourtant dans ce cas que la fonction $f(x)$ remplisse une infinité d'égalités

$$f(a_\nu) = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$$

les quantités a_ν étant en outre assujeties à la condition $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$. Il est évident que si l'on pouvait établir une égalité de la forme

$$f(x) = A_1 + A_2'(x - a_1) + A_3''(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x - a_1)\ldots(x - a_\nu) + \ldots$$

[1] Gauss, *Theoria interpolationis methodo nova tractata;* Werke, Bd. 3, page 274.

les valeurs $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ se calculeraient aisément des valeurs A_ν et on pourrait alors par cette égalité même déterminer la fonction quand on en connaît les valeurs pour un nombre infini de valeurs de la variable x assujeties à la seule condition $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$.

C'est en effet l'existence de cette égalité que nous allons prouver, mais avant d'aborder cette question nous étudierons les propriétés des séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$.

En étudiant les séries de la forme $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ où a est une quantité complexe finie, on trouve aisément qu'elles offrent beaucoup d'analogie avec les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $x-a$. On peut en effet regarder ces dernières séries comme un cas particulier des séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$. Les quantités $B_1, \ldots, B_\nu, \ldots$ sont supposées indépendantes de x.

Je veux d'abord développer ici quelques théorèmes qui montrent leur caractère très simple pour enfin en faire usage en traitant la question ci-dessus mentionnée.

Théorème I. *Si une série de forme* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim a_\nu = a$ *est convergente pour* $x = x_1$ *elle est absolument convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $|x-a| < |x_1-a|$.

Soit en effet

$$\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right| < \varepsilon < 1$$

on peut déterminer un nombre entier positif m tel que

$$\left|\frac{x-a_{m+\nu}}{x_1-a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon < 1. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

En écrivant

$$\sum |B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)|$$

$$\sum_{0}^{\infty} |B_\nu(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)| \cdot \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)}\right|$$

on voit que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\, B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\,| < G \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right|$$

G étant un nombre positif plus grand que le module de chaque terme de la série convergente $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)$.

Mais la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right|$$

est évidemment convergente, ce que l'on voit en écrivant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right| + \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m-1})} \right| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_m)\ldots(x-a_{m+\nu})}{(x_1-a_m)\ldots(x_1-a_{m+\nu})} \right|$$

$$< \sum_{\nu=0}^{m-1} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_1)} \right| + \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m-1})} \right| \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu .$$

D'où l'on conclut enfin que la série $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |\, B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\,|$ est convergente tant que $|x-a| < |x_1-a|$.

Le théorème nous montre qu'à chaque série de forme

$$\sum_0^{\infty} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

correspond un nombre réel et positif r tel que la série est absolument convergente si $|x-a| < r$, mais divergente si l'on a $|x-a| > r$.

Le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ est par conséquent un cercle auquel nous donnerons le nom de *cercle de convergence*. Ce n'est alors que sur la circonférence du cercle de convergence qu'il y a incertitude quant à la convergence de notre série.

Par la démonstration du théorème précédent nous avons établi aussi un théorème qui correspond tout à fait à un théorème connu d'Abel

sur les séries ordonnées suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, savoir:

Théorème II. *Etant donnée la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim a_\nu = a$, *si pour une valeur de la variable telle que* $|x-a| = r'$ *les modules des termes de la série sont moindres qu'un nombre déterminé, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable assujeties à la condition* $|x-a| < r'$.

Théorème III. *Si* r_1 *est un nombre positif moindre que le rayon de convergence de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, *la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de* x *assujeties à la condition* $|x-a| \leqq r_1$.

Soit en effet r_2 une quantité positive telle que l'on ait

$$r_1 < r_2 < r$$

r étant le rayon de convergence de la série et x_2 une quantité complexe telle que $|x_2 - a| = r_2$. En posant

$$r_2 - r_1 = 4\delta$$

$$\frac{r_2 - 3\delta}{r_2 - \delta} = \varepsilon$$

je puis déterminer un nombre entier positif m tel que

$$\left|\frac{x - a_{m+\nu}}{x_2 - a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour toute valeur de x assujetie à la condition $|x-a| \leqq r_1$.

En effet nous déterminons m de sorte que

$$|a_{m+\nu} - a| < \delta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$|x - a_{m+\nu}| < |x-a| + |a - a_{m+\nu}|$$

$$< r_2 - 3\delta$$

tant que l'on ait $|x-a| \leqq r_1$, ainsi que

$$|x_2 - a_{m+\nu}| > r_2 - \delta.$$

Ces deux inégalités nous montrent que

$$\left|\frac{x - a_{m+\nu}}{x_2 - a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon < 1 \quad \text{pour} \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ |x - a| \leq r_1. \end{array}\right.$$

En écrivant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x_2 - a_1) \ldots (x_2 - a_\nu)| \left|\frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(x_2 - a_1) \ldots (x_2 - a_\nu)}\right|$$

et procédant comme pour la démonstration du théorème I on prouve que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)|$$

est uniformément convergente pour toutes les valeurs de la variable situées dans le domaine en question. Cela a par conséquent aussi lieu pour ce qui concerne la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

C. q. f. d.

Le théorème III nous permet d'en tirer la conclusion qui suit.[1]

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

peut être égalée à une série $\mathfrak{P}(x - a)$, *procédant suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de* x *comprises à l'intérieur du cercle de convergence de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

On doit observer que le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$ peut s'étendre au dehors du cercle de convergence de $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

[1] K. Weierstrass, *Zur Functionenlehre*, Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1880, pag. 7.

Nous pouvons encore à l'égard de nos séries établir un théorème correspondant au théorème remarquable dû à Abel et Dirichlet.[1]

Théorème IV. *Si la série*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

est convergente pour une valeur α *de* x $(\alpha \neq a_\nu)$ *on a l'égalité*

$$\lim_{\varepsilon=0} f[\alpha - \varepsilon(\alpha - a)] = f(\alpha)$$

ε *étant réel et positif.*

Pour plus de simplicité, nous en donnerons la démonstration plus tard, mais nous avons voulu citer le théorème ici pour mettre en évidence l'analogie complète qui existe entre les séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$ et les séries procédant suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable.

Étant donnée une fonction analytique $f(x)$ qui au voisinage du point a peut être développée en série $\mathfrak{P}(x - a)$ ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, si cette fonction peut être développée en série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, les coefficients B_ν peuvent se calculer aisément des valeurs $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ de la fonction aux points $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$. Mettons pour un instant

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$$

on voit en effet que

$$B_0 = A_1, \qquad B_1 = A'_2 = \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}, \ \ldots, \ B_\nu = A^{(\nu)}_{\nu+1} = \frac{A^{(\nu-1)}_{\nu+1} - A^{(\nu-1)}_\nu}{a_{\nu+1} - a_\nu}, \ \ldots$$

où les constantes $A^{(\nu)}_\mu$ sont calculées d'après la loi suivante:

$$A'_\mu = \frac{A_\mu - A_1}{a_\mu - a_1}, \ \ldots, \ A^{(\nu)}_\mu = \frac{A^{(\nu-1)}_\mu - A^{(\nu-1)}_\nu}{a_\mu - a_\nu}, \ \ldots$$

[1] Abel, *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$. Oeuvres complètes, Tome I, pag. 223.

D'un autre côté il est évident par la conclusion tirée du théor. III que si

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu+1}^{(\nu)}(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)$$

est convergente dans un cercle quelconque elle est dans ce cercle égale à $f(x)$, car l'égalité subsiste pour une infinité de valeurs de la variable.

En appliquant ces résultats à la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ $(a \lesseqgtr 0)$ on obtient

$$A_{\nu+1}^{(\nu)} = (-1)^\nu \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{\nu+1}}$$

et en écrivant

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1} - \frac{x - a_1}{a_1 a_2} + \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{a_1 a_2 a_3} - \ldots + (-1)^\nu \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{a_1 a_2 \ldots a_\nu a_{\nu+1}} + \ldots$$

l'étude de la valeur limite

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \dfrac{(x - a_1)\ldots(x - a_{\nu+1})}{a_1 a_2 \ldots a_{\nu+1} a_{\nu+2}}}{(-1)^\nu \dfrac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{a_1 \ldots a_{\nu+1}}} = \frac{x - a}{a}$$

met en évidence que la série du second membre est convergente tant que $|x - a| < |a|$ ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a_1} - \frac{x - a_1}{a_1 a_2} + \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{a_1 a_2 a_3} - \ldots$$

$$\text{pour } |x - a| < |a|$$

Soit α une quantité quelconque qui n'est assujetie qu'à la condition de ne pas être égale à a, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$ le développement de $\frac{1}{x}$ nous donne

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} - \frac{(x - a_1)}{(a_1 - \alpha)(a_2 - \alpha)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^\nu \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(a_1 - \alpha)\ldots(a_\nu - \alpha)(a_{\nu+1} - \alpha)} + \ldots$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} + .$$

$$\text{pour } |x - a| < |\alpha - a|.$$

Ce développement nous donne les deux identités qui suivent

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{\nu-1})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{\nu-1})(\alpha - a_\nu)} + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)} \cdot \frac{1}{\alpha - x}$$

et

$$0 = F_n(x) = \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})}{(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1})} + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})(x - a_n)}{(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1})(a - a_{n+1})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})(x - a_n) \ldots (x - a_\nu)}{(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n+1}) \ldots (a_n - a_\nu)} + \ldots$$

$$\text{pour } |x - a| < |a_n - a|.$$

Nous observons de plus à l'égard de $F_n(x)$ que cette série est égale à zéro quand $x = a_\nu$ ($\nu \gtrless n$) mais égale à 1 pour $x = a_n$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction analytique quelconque qui dans le voisinage du point a peut être développée en série $\mathfrak{P}(x - a)$, et soient $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ tous compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$, soit de plus S l'aire d'un cercle $|x - a| \leqq r$ comprenant toutes les quantités $x, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ et située à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$ on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x} d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{(x - a_1)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{\nu-1})}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)} d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}\frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)} d\alpha$$

les intégrales du second membre se rapportant au contour de S.

Quant à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}\frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)} d\alpha$$

on voit alors qu'elle diminue sans limite quand le nombre ν va en augmentant ce qui nous amène à l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{x - a_1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})} d\alpha + \ldots$$

Soient comme ci-dessus $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ les valeurs que prend $\mathfrak{P}(x-a)$ si on y pose $x = a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$, l'égalité suivante a lieu

$$A_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})} d\alpha$$

(pour la définition de $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ voir page 6) ce qui nous permet d'écrire

$$F(x) = A_1 + A_2'(x - a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x - a_1)\ldots(x - a_\nu) + \ldots$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$.

D'ailleurs si nous supposons que tous les a_ν ne soient pas compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$ l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{x - a_1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})} d\alpha + \ldots$$

a pourtant lieu pour tout le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$, S représentant l'aire d'un cercle $|x - a| \leqq r$ comprenant à son intérieur tous les a_ν qui sont situés à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$.

Soient $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ ceux parmi les a_ν qui ne sont pas compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$ et soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les valeurs que prend le second membre de l'égalité, quand on y fait $x = a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_n}$, on voit que

$$\chi(x) = (A_{\nu_1} - C_1)F_1(x) + \ldots + (A_{\nu_n} - C_n)F_n(x)$$

est une série de la forme $\sum_{\nu=0}' B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ convergente et égale à zéro dans tout le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ et qui pour $x = a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_n}$ prend les valeurs $A_{\nu_1} - C_1, \dots, A_{\nu_n} - C_n$, ce qui nous permet d'écrire

$$F(x) = \chi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{x-a_1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)} d\alpha + \dots$$

pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Mais le second membre peut alors être transformé à une série de la forme $\sum_{\nu=0}' B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ laquelle pour $x = a_1, \dots, a_\nu, \dots$ prend les valeurs $A_1, \dots, A_\nu, \dots$.

On en conclut enfin que

$$B_\nu = A_{\nu+1}^{(\nu)},$$

ce qui met en évidence l'égalité

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \dots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\dots(x-a_\nu) + \dots$$

tant que x soit compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$. Je suis donc parvenu au resultat qui suit:

Soit $F(x)$ une fonction qui dans le voisinage de $x = a$ peut être développée en série $\mathfrak{P}(x-a)$, procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes de $x-a$, soient $A_1, \dots, A_\nu, \dots$ les valeurs que reçoit $F(x)$ en y mettant $x = a_1, \dots, a_\nu, \dots$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, $F(x)$ peut être développée en série

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \dots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\dots(x-a_\nu) + \dots$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Soient maintenant $A_m, \dots, A_{m+\nu}, \dots$ les valeurs que prend $\mathfrak{P}(x-a)$ en y mettant $x = a_m, \dots, a_{m+\nu}, \dots$ et soient $A_0, \dots, A_{m-1}$ des quantités complexes quelconques, on voit par des considérations analogues aux précédentes que dans le voisinage de $x = a$ on a l'égalité

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \dots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\dots(x-a_\nu) + \dots$$

de sorte que l'on parvient au résultat suivant:

Etant données les valeurs $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots; a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, *la convergence de la série*

$$A_1 + A'_2(x - a_1) + \ldots + A^{(\nu)}_{\nu+1}(x - a_1) \ldots (x - a_\nu) + \ldots$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $F(x)$ *qui dans le voisinage de* $x = a$ *puisse être développée en série de* Taylor *et satisfaisant à l'égalité*

$$F(a_{m+\nu}) = A_{m+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

m *étant un nombre positif entier suffisamment grand.*

Après avoir établi ces théorèmes de la théorie des fonctions je reviens au théorème IV, page 6. Il s'agissait de démontrer que si la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

est convergente pour $x = \alpha$, $(\alpha \gtrless a_\nu)$, on a l'égalité

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon=0} f[\alpha - \varepsilon(\alpha - a)]$$

ε étant réel et positif.

Evidemment cela revient à démontrer que la série est uniformément convergente pour les valeurs de x telles que l'on ait

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma < 1.$$

En posant

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu) = S_\mu^{(m)}$$

on peut écrire

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$$

$$= S_0^{(m)} \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_m)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_m)} + (S_1^{(m)} - S_0^{(m)}) \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+1})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+1})} + \ldots$$

$$\ldots + (S_\mu^{(m)} - S_{\mu-1}^{(m)}) \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+\mu})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+\mu})}$$

$$= S_0^{(m)}(\alpha - x) \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_m)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_m)(\alpha - a_{m+1})} + S_1^{(m)}(\alpha - x) \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+1})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+1})(\alpha - a_{m+2})} +$$

$$\ldots + S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha - x) \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+\mu-1})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+\mu-1})(\alpha - a_{m+\mu})} + S_\mu^{(m)} \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+\mu})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+\mu})}.$$

Soit δ un nombre positif quelconque, nous pouvons toujours déterminer un nombre positif entier m tel que l'on ait

$$\left| S_\mu^{(m)} \right| < \delta. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

On parvient alors à l'inégalité

$$\left| \sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu) \right| < \delta \left| \alpha - x \right| \sum_{\nu=m}^{m+\mu-1} \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} \right|$$

$$+ \delta \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_{m+\mu})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{m+\mu})} \right|.$$

Mais, x étant une valeur quelconque telle que l'on ait

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 < \varepsilon \leqq \gamma$$

on peut faire correspondre à chaque nombre a_ν une et une seule quantité $a_\nu(x)$ telle que l'on ait

$$\frac{x - a_\nu(x)}{\alpha - a_\nu(x)} = \left| \frac{x - a_\nu}{\alpha - a_\nu} \right|.$$

Les quantités $a_\nu(x)$ ainsi définies satisfont alors à l'égalité $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu(x) = a$.

Soit p un nombre positif entier suffisamment grand pour que l'on ait

$$\left| a_{p+\nu} - a \right| < \left| \alpha - a - \gamma(\alpha - a) \right|. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Toutes les quantités $a_{p+\nu}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sont alors comprises à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre le point a et ne comprenant à son intérieur aucune des valeurs $x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a)$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma$. Une considération géométrique très simple met alors en évidence que les quantités $\alpha - a_{p+\nu}(x)$ ont une limite supérieure finie pour tous les x en question et pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$; on en conclut enfin que l'on peut trouver un nombre positif g tel que l'on ait

$$g > \left| \frac{\alpha - a_{p+\nu}(x)}{\alpha - a_{p+\nu}} \right| \quad \text{pour} \left| \begin{array}{l} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right.$$

Soit enfin G une quantité positive telle que

$$G > \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_p)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_p)}\right|$$

$$\text{pour } x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 < \varepsilon \leqq \gamma$$

on peut affirmer que

$$G > \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{p+\nu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{p+\nu})}\right| \quad \text{pour} \begin{cases} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), & 0 < \varepsilon \leqq \gamma \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

et l'on peut écrire si $m > p$

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\right|$$

$$< \partial . |\alpha - x| . G \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \left|\frac{(x-a_m)\ldots(x-a_{m+\nu})}{(\alpha-a_m)\ldots(\alpha-a_{m+\nu})(\alpha-a_{m+\nu+1})}\right| + \partial G$$

$$< \partial |\alpha - x| G . \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \left|\frac{[x-a_m(x)]\ldots[x-a_{m+\nu}(x)]}{[\alpha-a_m(x)]\ldots[\alpha-a_{m+\nu}(x)]}\right| \left|\frac{\alpha-a_{m+\nu+1}(x)}{\alpha-a_{m+\nu+1}}\right| . \left|\frac{1}{\alpha-a_{m+\nu+1}(x)}\right| + \partial G$$

$$< \partial |\alpha - x| G . g . \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[x-a_m(x)]\ldots[x-a_{m+\nu}(x)]}{[\alpha-a_m(x)]\ldots[\alpha-a_{m+\nu}(x)][\alpha-a_{m+\nu+1}(x)]}\right| + \partial G$$

$$< \partial |\alpha - x| G . g . \frac{1}{|\alpha - x|} + \partial . G .$$

De là résulte enfin que

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\right| < \partial[G . g + G] \quad \text{pour} \begin{cases} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), & 0 < \varepsilon \leqq \gamma . \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Mais ∂ étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra cela nous fait voir que la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x telles que

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 < \varepsilon \leqq \gamma < 1.$$

C. q. f. d.

Nous ne nous sommes jusqu'ici occupés que des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$

où $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a =$ quantité finie. Si nous voulons maintenant étudier le caractère de ces séries en supposant que $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ nous y rencontrons comme cas speciaux la série binome

$$1 + \frac{x}{1}\cdot b + \frac{x(x-1)}{\underline{|2}} b^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\underline{|\nu}} b^\nu + \ldots$$

ainsi que la série hypergéométrique de Gauss. Je veux prouver ici que nos séries sont en général d'un caractère très simple dans le cas où $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$. Pour aborder l'étude de ces séries nous commencerons par l'étude de la série

$$\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})} + \ldots$$

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

Nous traiterons d'abord le cas où $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergente.* L'égalité

$$\frac{1}{a-x} - \left[\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a-a_1)\ldots(a-a_{n-1})(a-a_n)}\right]$$

$$= \frac{1}{a-x}\cdot\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)\ldots(a-a_n)}$$

$$= \frac{1}{a-x}\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)}{\left(1-\frac{a}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{a_n}\right)}$$

nous montre en effet que

$$\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})} + \ldots$$

$$= \frac{1}{a-x}\left[1 - \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}\right].$$

La série du premier membre de cette égalité est évidemment uniformé-

ment convergente ce que l'on conclut de ce que le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$ est uniformément convergent. Elle est aussi absolument convergent ce que l'on prouve en remplaçant a_ν par $-|a_\nu|$, α par $-|\alpha|$ et x par $|x|$, en observant en outre que les termes de la nouvelle série finissent par être tous du même signe.

Si d'un autre côté $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ est divergente nous ne pouvons pas traiter ce cas dans toute sa généralité mais nous nous occuperons ici des cas qui sont du plus grand intérêt.

Supposons donc que *tous les a_ν sont réels et positifs et que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ n'est pas convergente.* Dans l'égalité

$$\frac{1}{\alpha-x}-\left[\frac{1}{\alpha-a_1}+\frac{x-a_1}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_n)(\alpha-a_{n+1})}\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha-x}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}$$

nous pouvons mettre le second membre sous la forme suivante

$$\frac{1}{\alpha-x}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}=\frac{1}{\alpha-x}\,\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu}}\cdot e^{\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}$$

où les quantités m_ν sont choisies de sorte que

$$G(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

soit une fonction entière transcendante.[1]

[1] Voir WEIERSTRASS, *Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1876.

Soit α et x deux quantités telles que la partie réelle de $\alpha - x$ soit négative et désignons par $R[f(x)]$ la partie réelle de $f(x)$ on peut toujours trouver une quantité positive δ telle que

$$R(\alpha - x) < -\delta.$$

Soit g une quantité positive $> |\alpha| + |x|$ on peut écrire

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) = R\left(\frac{\alpha - x}{a_\nu}(1 + \varepsilon_\nu)\right)$$

où

$$\varepsilon_\nu = \frac{\alpha + x}{2a_\nu} + \frac{\alpha^2 + \alpha x + x^2}{3a_\nu^2} + \ldots + \frac{\alpha^{m_\nu - 1} + \alpha x^{m_\nu - 2} + \ldots + x^{m_\nu - 1}}{m_\nu a_\nu^{m_\nu - 1}}$$

ce qui nous donne

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{g}{a_\nu} + \frac{g^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{g^{m_\nu - 1}}{a_\nu^{m_\nu - 1}}.$$

En désignant par p un nombre positif suffisamment grand on a

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{g}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g}{a_\nu}}. \qquad (\nu > p)$$

Mais l'inégalité

$$|R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]| < g \cdot \frac{g}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g}{a_\nu}} \qquad (\nu > p)$$

nous montre que l'on peut prendre r assez grand pour que

$$|R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{pour } \nu > r$$

L'égalité

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) = \frac{1}{a_\nu}\left[R(\alpha - x) + R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]\right] \qquad (\nu > r)$$

nous permet alors d'écrire

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) < -\frac{\delta}{2a_\nu}. \qquad (\nu > r)$$

On voit alors que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{\alpha-x}\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right|$$

$$<\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{\alpha-x}\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu\right]}}\cdot e^{\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}\right|\cdot e^{\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}[illegible]}$$

ce qui nous montre enfin que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{\alpha-x}\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right|=0.$$

Si au contraire $R(\alpha-x)>0$ on prouve tout de même que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{\alpha-x}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right|=\infty.$$

Dans le cas ou $R(\alpha-x)=0$ il y a incertitude. L'égalité

$$\frac{1}{\alpha-x}=\frac{1}{\alpha-a_1}+\frac{x-a_1}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}+\ldots$$

a par conséquent lieu tant que $R(\alpha-x)<0$ et la série du second membre est convergente quand $R(\alpha-x)<0$; quand $R(\alpha-x)>0$ elle est divergente. Quant au cas où $R(\alpha-x)<0$ des considérations très simples nous montrent que la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs des variables x, α dans un domaine fini assujeti à la condition qu'on y a partout $R(\alpha-x)<\delta$, δ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Mais la série est aussi absolument convergente pour une valeur de x telle que l'on a

$$R(\alpha - x) < 0.$$

Soit en effet α et x deux quantités complexes quelconques telles que l'on a

$$R(\alpha - x) < 0$$

on peut déterminer deux autres quantités α_1, x_1 réelles et assujeties à la condition

$$R(\alpha) < \alpha_1 < x_1 < R(x).$$

La série

$$\frac{1}{\alpha_1 - a_1} + \frac{x_1 - a_1}{(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)} + \ldots + \frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})} + \ldots$$

est alors convergente et en fixant m assez grand pour que

$$x_1 - a_{m+\nu} < 0, \qquad \alpha_1 - a_{m+\nu} < 0 \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

on en conclut que la série

$$\frac{1}{\alpha_1 - a_m} + \frac{x_1 - a_m}{(\alpha_1 - a_m)(\alpha_1 - a_{m-1})} + \ldots + \frac{(x_1 - a_m)\ldots(x_1 - a_{m+\nu})}{(\alpha_1 - a_m)\ldots(\alpha_1 - a_{m+\nu})(\alpha_1 - a_{m+\nu+1})} + \ldots$$

est convergente. Mais tous ses termes étant négatifs cela ne peut avoir lieu sans que la série soit absolument convergente, ce qui nous permet d'affirmer que la série

$$\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x_1 - a_1}{(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)} + \ldots + \frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})} + \ldots$$

est absolument convergente.

En posant

$$\left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}\right|$$

$$= \left|\frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})}\right| \cdot \left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}\right| \cdot \left|\frac{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_{\nu+1})}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})}\right|$$

on peut écrire

$$\left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}\right| < G\left|\frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})}\right|$$

G étant un nombre positif assujeti à la condition

$$G > \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(x_1 - a_1) \ldots (x_1 - a_\nu)} \right| \cdot \left| \frac{(\alpha_1 - a_1) \ldots (\alpha_1 - a_{\nu+1})}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_{\nu+1})} \right| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

quantité qui peut toujours se déterminer si l'on observe que $R(x_1 - x) < 0$ et $R(\alpha - \alpha_1) < 0$.

Enfin cette dernière inégalité nous permet d'écrire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} \right| < G \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x_1 - a_1) \ldots (x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1) \ldots (\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})} \right|$$

ce qui nous montre que la série du premier membre est convergente.

En supposant que les a_ν ont tous le même argument, c'est à dire que

$$a_\nu = r_\nu e^{\theta i}$$

θ ne changeant pas avec ν, la substitution $x = \xi e^{\theta i}$, $\alpha = \beta e^{\theta i}$ nous fait voir que la série

$$\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \ldots (\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}$$

est uniformément convergente ainsi qu'absolument tant que $R(\beta - \xi) < 0$ c'est à dire tant que l'on ait

$$R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{-\theta i}) < 0.$$

Revenons maintenant à l'étude des séries $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu (x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ en général.

En supposant que $r_1, \ldots, r_\nu, \ldots$ *soient des quantités positives ou nulles telles que* $\lim\limits_{\nu=\infty} r_\nu = \infty$ *et* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu}$ *divergent* je puis démontrer les théorèmes qui suivent:

Théorème I. *Si la série* $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu (x - r_1) \ldots (x - r_\nu)$ *est convergente pour* $x = \alpha$, $(\alpha \gtrless a_\nu)$, *elle est aussi convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $R(\alpha - x) < 0$.

En posant

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha - r_1)\ldots(\alpha - r_\nu) = S_\mu^{(m)}$$

on parvient par les mêmes transformations qu'à la page 11 à l'égalité

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x - r_1)\ldots(x - r_\nu)$$

$$= S_0^{(m)}(\alpha - x)\cdot\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_m)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_m)(\alpha-r_{m+1})} + S_1^{(m)}(\alpha-x)\cdot\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+1})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+1})(\alpha-r_{m+2})} + \ldots$$

$$\ldots + S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha - x)\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+\mu-1})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+\mu-1})(\alpha-r_{m+\mu})} + S_\mu^{(m)}\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+\mu})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+\mu})}.$$

Mais $R(\alpha - x)$ étant négatif nous avons prouvé page 17 que

$$\lim_{\nu=\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)}\right| = 0$$

d'où l'on conclut que l'on peut déterminer un nombre positif G tel que

$$G > \left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)}\right|. \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

D'un autre côté G peut être fixé de sorte qu'il satisfasse à la condition

$$G > |\alpha - x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})}\right|.$$

Etant donné un nombre positif δ aussi petit que l'on voudra on peut prendre m assez grand pour que l'on ait

$$|S_\mu^{(m)}| < \frac{\delta}{2G} \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)\right| < \frac{\delta}{2G}\cdot|\alpha - x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})}\right| + \frac{\delta}{2}$$

$$< \delta \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

ce qui prouve le théorème.

Par des considérations très faciles à effectuer on parvient alors au résultat qui suit:

Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *est convergente pour* $x = \alpha$, $(\alpha \lessgtr a_\nu)$ *elle est aussi convergente pour chaque valeur de* x *telle que*

$$R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{-\theta i}) < 0.$$

Posons en effet,

$$x = \xi e^{\theta i}, \qquad \alpha = \beta e^{\theta i}$$

la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu e^{\nu\theta i}(\xi - r_1) \ldots (\xi - r_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$$

est convergente pour $\xi = \beta$. Elle est par conséquent convergente tant que l'on a

$$R(\xi - \beta) = R(\alpha e^{-\theta i} - \beta e^{-\theta i}) < 0.$$

C. q. f. d.

Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ est divergente pour $x = \alpha$ elle est par conséquent divergente pour chaque valeur de x telle que $R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{\theta i}) > 0$. On peut encore affirmer:

A chaque série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *correspond un nombre réel* ρ *tel que la série soit convergente tant que* $R(xe^{-\theta i}) > \rho$ *mais divergente tant que* $R(xe^{-\theta i}) < \rho$.

L'équation

$$R(xe^{-\theta i}) = \rho$$

représentant dans le plan de la variable x, une ligne droite, je puis affirmer que le domaine de convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ se compose de la partie du plan de la variable x qui est située à la même côté de la ligne droite

$$R(xe^{-\theta i}) = \rho$$

que les quantités $r_\nu e^{\theta i}$ pour une valeur suffisamment grande de ν. En

regardant la ligne droite comme un cercle dont le centre est situé à l'infini on peut parler d'un cercle de convergence aussi pour ces séries.

Théorème II. *La série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1) \ldots (x - r_\nu)$ *est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise tout entière à l'intérieur du domaine de convergence de la série.*

Ayant déterminé une aire finie quelconque B je puis en effet fixer deux nombres réels α et β situés à l'intérieur du domaine de convergence de la série et tels que l'on ait

$$\alpha < \beta < B < r$$

pour toutes les valeurs de l'aire B.

Tant que x sera compris dans le domaine les quantités

$$\left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right|, \qquad \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

tendront uniformément vers zéro quand ν ira en augmentant (voir page 17) ce qui fait voir quil existe un nombre positif G assujeti aux conditions

$$G > \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right|$$

$$G > \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

pour toute valeur de l'aire B et pour $\nu = 1, 2, \ldots$

En posant

$$|\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right|$$

$$= |\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right| \cdot \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

$$< G|\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right|$$

on voit que l'on peut fixer un nombre positif fini G_1 qui est plus grand que le second membre de cette égalité pour toutes les valeurs de la variable x situées dans l'aire B.

Soit maintenant m assez grand pour que l'on ait

$$\left| S_\mu^{(m)} \right| < \frac{\delta}{G + G_1} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

on voit par les mêmes considérations qu'au théorème I que

$$\left| \sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x - r_1) \ldots (x - r_\nu) \right| < \delta$$

pour toutes les valeurs de la variable situées dans l'aire B et pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. C. q. f. d.

Par la substitution $x = \xi e^{\theta i}$ on parvient enfin au théorème suivant:

La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise tout entière à l'intérieur du domaine de convergence de la série.*

Cela nous montre enfin que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$$

est une fonction holomorphe à l'intérieur du domaine de convergence de la série.

Jusqu'ici l'analogie avec les caractères connus des séries ordonnées suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable est complète. Mais en nous demandant si la série est aussi absolument convergente pour chaque valeur de la variable comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série, des considerations très élémentaires mettent en évidence que cela n'a pas toujours lieu. Nous savons en effet par les recherches d'Abel qu'en mettant $|y| = 1$, $y \lessgtr -1$ dans la série

$$1 + \frac{x}{1} y + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \ldots + \frac{x(x-1) \ldots (x-\nu+1)}{\underline{|\nu}} y^\nu + \ldots$$

cette série est convergente sans être pourça absolument convergente tant que

$$-1 < R(x) < 0.$$

Par nos propres recherches ci-dessus nous savons que la série binôme est dans ce cas uniformément convergente dans un domaine fini quelconque tel que l'on y ait partout $-1 < R(x) < 0$.

Pour les séries $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ il y a par conséquent lieu de distinguer d'un côté leur domaine de convergence de l'autre leur domaine de convergence absolue, si nous entendons par ce nom l'ensemble de toutes les valeurs de la variable pour lesquelles la série est absolument convergente.

A l'égard de la convergence absolue on a le théorème suivant:

Théorème III. *Si la série $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)$ est absolument convergente pour $x = \alpha$, $\alpha \lessgtr r_\nu$ elle est aussi absolument convergente pour chaque valeur de x telle que $R(\alpha - x) < 0$.*

Soit en effet x une valeur de la variable satisfaisant à l'inégalité

$$R(\alpha - x) < 0$$

on peut alors fixer un nombre positif fini G tel que l'on ait

$$G > \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)| = \sum_{\nu=0}^{\prime} |B_\nu(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)| \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right|$$

$$< G \sum_{\nu=0}^{\prime} |B_\nu(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)|.$$

C. q. f. d.

La substitution $x = \xi e^{\theta i}$ nous donne pour résultat:

Si la série $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ est absolument convergente pour $x = \alpha$, $\alpha \lessgtr r_\nu e^{\theta i}$, elle est aussi absolument convergente pour chaque valeur de x telle que $R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{-\theta i}) < 0$.

On en conclut enfin:

A chaque série $\sum\limits_{\nu=0}' B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ correspond un nombre réel σ tel que la série est absolument convergente tant que $R(x e^{-\theta i}) > \sigma$, mais n'est pas absolument convergente tant que $R(x e^{-\theta i}) < \sigma$.

Dans le cas où $\rho < \sigma$ il existe par conséquent une partie du plan de la variable x, savoir

$$\rho < R(xe^{-\theta i}) < \sigma$$

telle que la série est convergente pour toutes les valeurs de cette partie du plan et même uniformément convergente dans chaque aire finie comprise à l'intérieur de cette partie du plan, sans que la convergence absolue ait lieu pour un seul point qui y soit situé.

Nous nous occuperons maintenant des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty}' B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ en admettant pour les a_ν que $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ et que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ est convergent. Nous pouvons à l'égard de ces séries établir quelques théorèmes analogues à ceux démontrés pour le cas déjà traité.

Théorème I. *Soient* $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ *est convergente pour* $x=\alpha$, $(\alpha \lesseqgtr a_\nu)$ *elle est convergente pour chaque valeur finie de la variable.*

Soit en effet

$$S_\mu^{(m)} = \sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu).$$

Nous pouvons écrire

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$$

$$= S_0^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_m)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_m)(\alpha-a_{m+1})} + S_1^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+1})(\alpha-a_{m+2})} + \ldots$$

$$\ldots + S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu-1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu-1})(\alpha-a_{m+\mu})} + S_\mu^{(m)}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}.$$

Soit δ une quantité positive aussi petite que l'on voudra, je puis donner à m une valeur assez grande pour que l'on ait

$$|S_\mu^{(m)}| < \delta$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\right|$$

$$< \delta\left[|\alpha - x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}\right| + \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}\right|\right].$$

Mais les recherches de la page 14 nous montrent que le second membre tend vers zéro en même temps que δ, ce qui prouve le théorème. En étudiant le second membre de l'égalité on parvient aisément au théorème qui suit.

Théorème II. *Soient* $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ *est convergente pour* $x=\alpha$, $\alpha \lessgtr a_\nu$, *elle est uniformément convergente dans une aire finie quelconque du plan de la variable* x.

De ce théorème on conclut que chaque série $\sum_{\nu=0}^{r} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ qui est convergente pour d'autres valeurs de la variable que $x = a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ représente une fonction entière de x.

Théorème III. *Soient* $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ *est absolument convergente pour* $x=\alpha$, $\alpha \lessgtr a_\nu$, *elle est absolument convergente pour chaque valeur finie de la variable.*

Soit x une valeur quelconque de la variable, l'égalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)| = \sum_{\nu=0}^{r}|B_\nu(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)|\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)}\right|$$

nous fait voir que le théorème est vrai.

Pour faire voir enfin comment le domaine de convergence change avec la choix des a_ν nous traiterons encore quelques exemples.

Nous supposerons d'abord que *tous les* a_ν *sont réels, que* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu}$ *est convergent mais* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|}$ *est divergent.*

Il y a alors lieu de distinguer deux cas.

A) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^2}$ *est convergent.*

Dans ce cas on a les égalités

$$\frac{1}{\alpha - x} - \left[\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{n-1})(\alpha - a_n)}\right]$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{\alpha}{a_n}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha - x}$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right)} = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)e^{\frac{x}{a_\nu}}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right)e^{\frac{\alpha}{a_\nu}}} \cdot e^{(\alpha - x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}}.$$

Mais $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^2}$ étant convergent on en conclut que les produits du second membre de l'égalité sont convergents ce qui nous permet enfin d'affirmer que la série

$$\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} + \ldots$$

est convergente pour chaque valeur finie de la variable x. Elle est aussi uniformément convergente dans chaque aire finie du plan.

Quant à la convergence absolue elle n'a lieu pour aucune valeur de la variable.

Soient en effet α et x deux valeurs des variables telles que $R(\alpha) = 0$ et $R(x) = 0$. Dans ce cas on peut écrire

$$|x - a_\nu| = |x - |a_\nu||, \qquad |\alpha - a_\nu| = |\alpha - |a_\nu||$$

c'est à dire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}\right| = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x - |a_1|)\ldots(x - |a_\nu|)}{(\alpha - |a_1|)\ldots(\alpha - |a_\nu|)(\alpha - |a_{\nu+1}|)}\right|.$$

Mais l'égalité

$$\frac{1}{\alpha - x} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-|a_1|)\ldots(x-|a_\nu|)}{(\alpha-|a_1|)\ldots(\alpha-|a_\nu|)(\alpha-|a_{\nu+1}|)} = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{|a_\nu|}\right)e^{\frac{x}{|a_\nu|}}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{|a_\nu|}\right)e^{\frac{x}{|a_\nu|}}} \cdot e^{(\alpha-x)\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}}$$

met en évidence que la série du premier membre n'est pas convergente, ce qui prouve la divergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-|a_1|)\ldots(x-|a_\nu|)}{(\alpha-|a_1|)\ldots(\alpha-|a_\nu|)(\alpha-|a_{\nu+1}|)}\right|$$

ainsi que celle de

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}\right|.$$

Cela nous montre enfin que la série en question n'est absolument convergente pour aucune valeur de la variable, des considérations tout analogues à celles du théorème III page 26 mettant en évidence que si la série est absolument convergente pour un système de valeurs x, α des variables ($x \gtrless a_\nu$, $\alpha \gtrless a_\nu$), elle l'est aussi pour chaque système de valeurs des variables.

B) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2}$ *est divergent.*

Pour plus de simplicité nous supposerons que l'on puisse trouver un nombre entier positif m suffisamment grand pour que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{2m}} \quad \text{convergent.}$$

Soient de plus les a_ν ordonnés de sorte que l'on ait

$$|a_{\nu+1}| \geqq |a_\nu|.$$

La série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ étant convergente, une considération due à Abel nous fait alors voir que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}\cdot\frac{1}{a_\nu^{2\mu}}$ est convergente pour $\mu = 1, 2, \ldots$

L'égalité

$$\lim_{n=\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)} = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu}}\, e^{\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^{\mu}-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\mu}\right]$$

$$=(\alpha-x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}+\frac{\alpha^3-x^3}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}+\ldots+\frac{\alpha^{2m-1}-x^{2m-1}}{2m-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{2m-1}}$$

$$+\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m-1}\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\alpha^2}{a_\nu^2}\right)^{\mu}-\left(\frac{x^2}{a_\nu^2}\right)^{\mu}\right]$$

nous font voir de même qu'aux pages 16, 17 que la série

$$\frac{1}{\alpha-a_1}+\frac{x-a_1}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}+\ldots$$

est convergente tant que $R(\alpha^2-x^2)<0$ mais divergente tant que $R(\alpha^2-x^2)>0$. La série est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série, mais elle n'est absolument convergente pour aucune valeur de x.

Quant au domaine de convergence de la série, l'égalité

$$R(\alpha^2-x^2)<0$$

se transforme en

$$\xi^2-\eta^2>R(\alpha^2)$$

si nous posons $x=\xi+\eta i$, ξ et η étant réels. Cela met en évidence que le domaine de convergence de la série se compose de la partie du plan de la variable x qui est renfermée entre les deux branches de l'hyperbole

$$\frac{\xi^2}{R(\alpha^2)}-\frac{\eta^2}{R(\alpha^2)}=1.$$

Dans le cas où $R(\alpha^2)=0$ l'hyperbole se transforme en deux lignes droites

$$\xi-\eta=0,\qquad \xi+\eta=0.$$

Nous traiterons encore un exemple.

Soit

$$a_{2\nu-1}=(-1)^{\nu}\sqrt[4]{\nu},\qquad a_{2\nu}=i(-1)^{\nu}\sqrt[4]{\nu}. \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

Dans cette hypothèse on voit que les séries $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}$ sont

toutes convergentes, mais la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^4}$ est divergente. D'un autre coté la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^5}$ étant convergente l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right)}$$

$$= \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu}} . e^{\frac{\alpha-x}{1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu} + \frac{\alpha^2-x^2}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2} + \frac{\alpha^3-x^3}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}} . e^{\lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha^4-x^4}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_\nu^4}\right)}$$

met en évidence que la série est convergente tant que

$$R(\alpha^4 - x^4) < 0$$

mais divergente tant que $R(\alpha^4 - x^4) > 0$.

En posant $x = re^{\theta i}$ l'égalité

$$r^4 \cos 4\theta = R(\alpha^4)$$

nous fait voir que le domaine de convergence de la série est limité par une courbe à quatre branches à laquelle les quatre lignes

$$\cos 4\theta = 0$$

sont des asymptotes.

Si nous voulons maintenant chercher à développer une fonction analytique quelconque $F(x)$ en série de forme $\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ nous pouvons étudier le reste R_n dans le développement

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{x - a_1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_n)} d\alpha + R_n$$

savoir

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}\,\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_n)}\,d\alpha$$

mais l'étude de ce reste semble offrir beaucoup de difficulté. C'est pourquoi nous préférons donner ici quelques développements en série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$$

auxquels on parvient à l'aide du développement de $\frac{1}{\alpha - x}$ donné ci-dessus.

Pour plus de simplicité nous admettons que tous les a_ν sont positifs ou nuls et que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ est divergente. En posant $a_\nu = r_\nu$ on sait alors que

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - r_1} + \frac{x - r_1}{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2)} + \ldots + \frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})} + \ldots$$

Mais la série du second membre étant uniformément convergente on peut la dériver par rapport à α ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{(\alpha-x)^2} = \frac{1}{(\alpha-r_1)^2} + \frac{(x-r_1)}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)}\left[\frac{1}{\alpha-r_1}+\frac{1}{\alpha-r_2}\right]$$
$$+ \frac{(x-r_1)(x-r_2)}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)(\alpha-r_3)}\left[\frac{1}{\alpha-r_1}+\frac{1}{\alpha-r_2}+\frac{1}{\alpha-r_3}\right]+\ldots$$
$$\text{pour } R(\alpha - x) < 0.$$

Mais la dérivée d'une série uniformément convergente étant aussi uniformément convergente on peut la dériver encore une fois etc., ce qui nous permet d'affirmer que chaque fonction rationnelle algébrique peut être développée en série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-r_1)\ldots(x-r_\nu)$ tant que la partie réelle de x est plus grande que la partie réelle de tous les pôles de la fonction.

Au lieu de dériver notre série nous pouvons la soumettre à l'intégration ce qui met en évidence que le logarithme peut être développé en une telle série. Quant à la série du binôme et la série hypergéométrique de Gauss elles ont été trop étudiées pour que je m'en occupe.

Je veux donner ici un développement en série de la fonction $D_x \log \Gamma(x+1)$ qui me semble offrir de l'intérêt.

Soit $\alpha_\nu = \nu - 1$, le développement de $\frac{1}{\alpha - x}$ en serie nous donne le résultat qui suit si l'on y change le signe de α, savoir

$$\frac{1}{\alpha + x} = \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha(\alpha + 1)} + \frac{x(x - 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^\nu \frac{x(x - 1)\ldots(x - \nu + 1)}{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + \nu)} + (-1)^{\nu+1} \frac{x(x - 1)\ldots(x - \nu)}{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + \nu)} \cdot \frac{1}{\alpha + x}$$

d'ou l'on conclut

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + x} = \frac{x}{\mu(\mu + 1)} - \frac{x(x - 1)}{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{x(x - 1)\ldots(x - \nu + 1)}{\mu(\mu + 1)\ldots(\mu + \nu)} + (-1)^\nu \frac{x(x - 1)\ldots(x - \nu)}{\mu(\mu + 1)\ldots(\mu + \nu)} \cdot \frac{1}{\mu + x}.$$

En étudiant le développement connu de la fonction $D_x \log \Gamma(x + 1)$, savoir

$$D_x \log \Gamma(x + 1) = -C + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{x + \mu}\right]$$

où C est la constante d'Euler on trouve maintenant que

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + x}\right] = \left[x \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu + 1)} - x(x - 1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{m-1} x(x - 1)\ldots(x - m + 1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu\ldots(\mu + m)}\right]$$

$$+ (-1)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x(x - 1)\ldots(x - m)}{\mu(\mu + 1)\ldots(\mu + m)} \cdot \frac{1}{\mu + x}.$$

Par les considérations suivantes on peut enfin voir que le second membre tend vers zéro quand m va en augmentant.

Soit p un nombre entier plus grand que $|x|$ on trouve que

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} \left|\frac{x(x - 1)\ldots(x - m)}{\mu(\mu + 1)\ldots(\mu + m)} \cdot \frac{1}{\mu + x}\right| < \sum_{\mu=p}^{\infty} \frac{|x|}{\mu(\mu - |x|)}.$$

ce qui fait voir que l'on peut prendre p assez grand pour que

$$\sum_{\mu=p}^{\infty}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|<\frac{\delta}{2}$$

δ étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra.

D'un autre côté on a

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|=0$$

pour une valeur de x tel que $R(x+\mu)>0$, ce qui met en évidence que l'on peut déterminer m assez grand pour que

$$\sum_{\mu=1}^{p-1}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|<\frac{\delta}{2}$$

pour une valeur de x tel que $R(x+1)>0$.

Il est par conséquent démontré que le second membre de l'égalité ci-dessus tend vers zéro quand m va en augmentant ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+x}\right)=x\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)}-x(x-1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\nu}x(x-1)\ldots(x-\nu)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu+1)}+\ldots$$

Mais

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu+1)}=\frac{1}{\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}-\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{\nu+1}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}-\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}\right]$$
$$=\frac{1}{(\nu+1)\underline{|\nu+1}},$$

ce qui nous donne le développement cherché, savoir:

$$D_x\log\Gamma(x+1)+C=x-\frac{x(x-1)}{2\,.\underline{|2}}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot\underline{|3}}-\ldots$$
$$\ldots(-1)\,\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu)}{(\nu+1)\underline{|\nu+1}}+\ldots$$

tant que $R(x+1)>0$.

De cette égalité on passe aisément à l'expression connue de $D_x \log \Gamma(x+1)$ par une intégrale définie. Car le second membre n'étant autre chose que

$$\int_0^1 \frac{1-(1-y)^x}{y}\, dy$$

nous pouvons écrire

$$D_x \log \Gamma(x+1) = -C + \int_0^1 \frac{1-(1-y)^x}{y}\, dy.$$

Par la substitution

$$1 - y = z$$

on parvient enfin à la formule de GAUSS[1]

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log \frac{1}{z}} - \frac{z^x}{1-z} \right) dz = D_x \log \Gamma(x+1).$$

Les séries de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ ont été étudiées sous tout un autre point de vue par M. FROBENIUS dans son mémoire *Ueber die Entwickelung analytischer Functionen in Reihen die nach gegebenen Functionen fortschreiten*, CRELLE's Journal, Bd. 73, où il parvient dans des cas plus spéciaux à quelques-uns des développements en série des pages 8, 14, 17.

Dans son mémoire *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, CRELLE's Journal, Bd. 84, M. HERMITE a aussi établi une relation à l'aide de laquelle on parvient immédiatement au développement en série de la page 9, comme je l'ai montré dans une note insérée dans les Comptes rendus du 23 Novembre et du 7 Décembre 1885.

[1] Voir GAUSS, Werke, Bd. 3, page 159.

SUR LA REPRÉSENTATION DES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES PAR DES RÉSIDUS INTÉGRAUX

PAR

P. TCHEBYCHEFF
à S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par Sophie Kowalevski à Stockholm.)

Dans un mémoire *Sur les valeurs limites des intégrales*, publié en 1874 dans le Journal de mathématiques de LIOUVILLE, nous avons communiqué quelques résultats concernant les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

dans le cas où l'on donne les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2f(x)dx, \ \ldots$$

prises entre des limites plus vastes: $a < u$, $b > v$ et où la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

D'après un théorème contenu dans ce mémoire si le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \ \ldots, \ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

---

[1] О представленіи предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ. СПБ. 1885. Appendice au tome 51 des Annales de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg.

Acta mathematica. 9. Imprimé le 16 Octobre 1886.

est pair $= 2m$, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

ne peuvent être déterminées que dans le cas où les limites u, v satisfont à une équation, dont les coefficients dépendent de la valeur des intégrales données.

Pour obtenir cette équation et les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx,$$

dans le cas où u, v satisfont à cette équation, nous développons l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en une série, procédant selon les puissances décroissantes de z

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{z^2} + \ldots.$$

Posant

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0, \qquad \int_a^b x f(x)\,dx = A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx = A_{2m-1}$$

nous obtenons donc pour l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

l'expression approximative suivante, rigoureuse jusqu'au terme $\frac{1}{z^{2m}}$ inclusivement:

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}.$$

En désignant donc par

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

la fraction continue, que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}$$

en fractions continues et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite, nous aurons par conséquent, aussi avec un degré d'approximation jusqu'au terme $\frac{1}{z^{2m}}$ inclusivement

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx = \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}.$$

A l'aide de la fraction continue, définie de cette façon, on établit l'équation à laquelle doivent satisfaire u et v, de même que les valeurs limites correspondantes de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx.$$

En désignant par

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

la fraction ordinaire, à laquelle peut se réduire la fraction continue en question, et en égalant le dénominateur $\psi_m(z)$ à zéro, on obtient l'équation

$$\psi_m(z) = 0$$

à laquelle doivent satisfaire les limites u et v de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx.$$

Et en désignant par

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{l-1},\ \ z_l,\ \ldots,\ z_{n-1},\ \ z_n,\ \ldots,\ z_m$$

toutes les racines de cette équation, disposées d'aprés leur grandeur croissante, on trouve que si l'on pose

$$u = z_l, \qquad v = z_n,$$

les valeurs limites de l'intégrale en question sont exprimées par les sommes

$$\frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi'_{m'}(z_{l+1})} + \frac{\varphi_m(z_{l+2})}{\psi'_{m'}(z_{l+2})} + \cdots + \frac{\varphi_m(z_{n-1})}{\psi'_{m'}(z_{n-1})},$$

$$\frac{\varphi_m(z_l)}{\psi'_{m'}(z_l)} + \frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi'_{m'}(z_{l+1})} + \cdots + \frac{\varphi_m(z_n)}{\psi'_{m'}(z_n)}.$$

Ces sommes sont composées des résidus de la fonction

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi'_{m'}(z)}$$

par rapport aux racines de l'équation

$$\psi'_{m'}(z) = 0$$

contenues dans les limites

$$z_l, \quad z_n$$

y étant ou non comprises les racines z_l et z_n elles mêmes.

Pour pouvoir exprimer ces sommes de résidus partiels par des résidus intégraux, nous conviendrons de désigner par ω une quantité positive infiniment petite. Vu que dans ce cas les racines de l'équation

$$\psi'_{m'}(z) = 0$$

contenues dans les limites

$$z_l + \omega, \qquad z_n - \omega$$

sont

$$z_{l+1}, \ z_{l+2}, \ \ldots, \ z_{n-1}$$

et les racines, contenues dans les limites

$$z_l - \omega, \qquad z_n + \omega,$$

sont

$$z_l, \ z_{l+1}, \ \ldots, \ z_n$$

nous pouvons représenter les sommes précédentes par les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{z_1+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{z_1-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

En conséquence des valeurs limites trouvées pour l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)\,dx$$

on aura donc

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)\,dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_1+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)\,dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_1-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

§ 2. Ces inégalités, de même que la solution d'un problème présentée dans un mémoire mentionnée plus haut, et d'autres problèmes du même genre, découlent immédiatement de la représentation des valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

par des résidus intégraux, dans le cas, où la limite supérieure de l'intégrale v reste arbitraire, mais la limite inférieure u coïncide avec la limite inférieure des intégrales

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b x f(x)\,dx, \; \ldots .$$

Dans ce cas les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

sont données par les formules suivantes:

(1) $$\int_a^v f(x)\,dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} F(z)$$

(2) $$\int_a^v f(x)\,dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega} F(z)$$

où $F(z)$ est une fonction rationnelle, dont la valeur dépend du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \ \ldots$$

et de leur valeur. Cette fraction s'obtient facilement en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ldots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m-\ldots}}},$$

dont les m dénominateurs peuvent toujours être trouvées, comme nous l'avons montré, lorsque l'on connaît les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx=A_0, \qquad \int_a^b xf(x)dx=A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx=A_{2m-1}.$$

En désignant comme auparavant par $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ la fraction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ldots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m}}}.$$

nous désignerons par $\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$ la fraction ordinaire que nous obtenons en nous arrêtant au terme

$$\frac{1}{\alpha_{m-1}z+\beta_{m-1}}.$$

Si, en outre des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx=A_0, \qquad \int_a^b xf(x)dx=A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx=A_{2m-1}$$

on connaît aussi la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b x^{2m} f(x)dx = A_{2m}$$

il est nécessaire, pour pouvoir déterminer la fraction rationnelle $F(z)$ dans les formules plus haut, de déterminer non seulement la fraction continue précitée et les deux fractions ordinaires $\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$, $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ mais aussi la valeur du coefficient de z, dans le $(m + 1)^{er}$ dénominateur de la fraction continue, obtenue par le développement de l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}} + \frac{A_{2m}}{z^{2m+1}}.$$

Nous désignerons ce coefficient par α_{m+1}.

§ 3. En étudiant la fraction rationnelle $F(z)$ nous remarquons que sous sa forme générale elle peut être exprimée d'une manière simple par une fraction continue. Dans cette dernière les m premiers dénominateurs sont identiques avec ceux de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x} dx.$$

La fraction rationnelle $F(z)$ pourra donc être représentée par la formule

$$(3) \qquad F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}}$$

où Z est une fonction inconnue.

Cette fonction peut être exprimée à l'aide des fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ seulement, si l'on connait les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx.$$

Mais si l'on veut se servir de $2m + 1$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m}f(x)dx$$

il faudra encore, pour déterminer $F(z)$, connaître une quantité constante α_{m+1}.

Dans le premier de ces deux cas, cette fonction sera donnée par la formule

$$(4) \qquad Z = \gamma(z - v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}$$

dans laquelle γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]$$

$$\frac{1}{b - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

Dans le second cas on trouve pour la détermination de Z deux formules différentes selon que la fraction

$$(5) \qquad \frac{\frac{1}{a - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}}{\frac{1}{b - v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}}$$

est positive ou négative. Dans le premier cas la fonction Z est définie par la formule

$$(6) \qquad Z = \alpha_{m+1}(z - v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}.$$

Dans le second cas Z est donné par la formule

$$(7)\qquad Z = \alpha_{m+1}(z-a) - \frac{(b-a)\rho\delta}{1-\rho} + \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{(b-a)^2\rho\delta}{(1-\rho)^2 z - (1-\rho)(b-a\rho)},$$

où

$$\rho = \frac{\dfrac{1}{a-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}}{\dfrac{1}{b-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}},$$

$$\delta = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}\right] - \alpha_{m+1}.$$

§ 4. L'expression de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx,$$

par les résidus intégraux nous conduit facilement à toutes les formules indiquées dans le mémoire précité.

En supposant connues les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b xf(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)\,dx$$

et supposant de plus que l'on cherche la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

pour une valeur de v satisfaisant à l'équation

$$\psi_m(v) = 0,$$

nous remarquons que d'après le § 3 la valeur de Z sera donnée dans ce cas par la formule

$$Z = \gamma(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)};$$

d'où il résulte, à cause de l'équation

$$\psi_m(v) = 0,$$

$$Z = \infty.$$

Par conséquent, d'après le § 3,

$$F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}.$$

En substituant à la fraction continue la fraction ordinaire qui lui est égale

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

on trouve

$$F(z) = \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Pour cette valeur de $F(z)$ les formules (1), (2) nous donnent

$$\int_a^v f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^v f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Ceci aura lieu pour toutes les valeurs de v satisfaisant à l'équation

$$\psi_m(v) = 0.$$

En posant l'un après l'autre

$$v = z_n, \qquad v = z_l,$$

(z_n et z_l signifient comme auparavant des racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0,$$

et $z_n > z_l$) nous déduisons de ces formules

$$\int_a^{z_n} f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_n} f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_l} f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{z_l-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_l} f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{z_l+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Et en retranchant les deux dernières inégalités des deux premières on trouve

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)dx \leqq \sum_{z_l-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)dx \geqq \sum_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Et comme nous l'avons vu au § 1 ces inégalités nous conduisent aux mêmes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{z_l}^{n} f(x)\,dx$$

que nous avons communiquées dans le Journal de LIOUVILLE pour le cas considéré.

§ 5. Pour appliquer les formules (1) et (2) à la résolution du problème proposé dans le mémoire précité, nous supposons que les trois quantités données

$$p,\ d,\ k$$

sont déterminées par les formules suivantes:

$$p = \int_0^b f(x)dx,$$

$$d = \frac{\int_0^b xf(x)dx}{\int_0^b f(x)\,dx},$$

$$k = \int_0^b (x-d)^2 f(x)dx.$$

et que l'on veut trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

pour le cas où la fonction inconnue $f(x)$ ne devient pas négative pour des valeurs de x entre 0 et v.

Vu que les trois quantités

$$p,\ d,\ k$$

déterminent les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^r f(x)\,dx = p,$$

$$\int_0^r x f(x)\,dx = pd,$$

$$\int_0^r x^2 f(x)\,dx = pd^2 + k,$$

les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)\,dx$$

dans le problème considéré seront déterminées par les formules qui s'appliquent au cas, quand le nombre des intégrales données est impair $2m + 1$; il faut poser de plus

$$m = 1, \qquad a = 0,$$

$$A_0 = p, \qquad A_1 = pd,$$

$$A_2 = pd^2 + k.$$

Pour déterminer la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

nous développons l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} = \frac{p}{z} + \frac{pd}{z^2}$$

en une fraction continue, en nous arrêtant toutefois au premier dénominateur, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p}}.$$

Nous trouvons donc

$$\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)} = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p}}; \qquad \frac{\varphi_0(z)}{\psi_0(z)} = \frac{0}{1};$$

$$\frac{\psi_0(z)}{\psi_1(z)} = \frac{p}{z - d}.$$

Pour déterminer la quantité constante $\alpha_{m+1} = \alpha_2$, nous développons en fraction continue l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z^3} = \frac{p}{z} + \frac{pd}{z^2} + \frac{pd^2 + k}{z^3},$$

en nous arrêtant au second dénominateur et ne considérant que le premier membre de ce dernier. De cette manière nous trouvons

$$pz + \frac{pd}{z^2} + \frac{pd^2 + k}{z^3} = \cfrac{1}{\cfrac{z - d}{p} - \cfrac{1}{\cfrac{p^2}{k} z + \dots}};$$

d'où l'on déduit, conformément à ce qui a été exposé au § 2,

$$\alpha_2 = \frac{p^2}{k}.$$

§ 6. En substituant ces valeurs dans la formule (5) on trouve la fraction

$$\frac{d - v + \frac{k}{pd}}{d - v - \frac{k}{p(b - d)}},$$

dont le signe décide, d'après le § 3, quelle des deux formules (6), (7) doit être employée pour déterminer la fonction Z.

Vu que cette fraction ne change de signe que pour les valeurs

$$v = d - \frac{k}{p(b-d)}, \qquad v = d + \frac{k}{pd},$$

pour lesquelles elle devient ∞ ou 0, tandis que pour $v = \infty$ et $v = -\infty$ elle est égale à $+1$ ou -1, on voit que cette fraction sera positive pour

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

et pour

$$v > d + \frac{k}{pd};$$

tandis qu'elle est négative lorsque v est contenu entre les limites

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

Par conséquent, si $v < d - \frac{k}{p(b-d)}$ ou bien $v > d + \frac{k}{pd}$ nous devons, conformément au § 3, nous servir de la formule (6) pour déterminer la fonction Z, ce qui nous donne

$$Z = \alpha_2(z - v) + \frac{\varphi_0(v)}{\varphi_1(v)} = \frac{p^2}{k}(z - v) + \frac{p}{v-d}.$$

Au contraire, dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}$$

la fonction Z sera déterminée par la formule (7) qui nous donne

$$Z = \frac{p^2}{k} z + (2d - b - v)\frac{p^2}{k} + (b-d)(v-d)\frac{dp^3}{k^2}$$

$$-\frac{p[p(b-d)d - k][p(v-d)d - k][p(v-d)(b-d) - k]}{k^3(z-d) - pk^2(b-d)(v-d)}.$$

En passant maintenant à la détermination de la fraction rationnelle $F(z)$, conformément au § 3, nous remarquons que dans le cas considéré la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

ne contient qu'un seul dénominateur

$$\alpha_1 z + \beta_1 = \frac{z}{p} - \frac{d}{p};$$

la formule (3) se réduit donc à

$$F(z) = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p} - \frac{1}{Z}}.$$

Aux deux valeurs de Z correspondent donc les valeurs suivantes de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)},$$

$$F(z) = \frac{pz^2 - p(b+v-d) + k + (b-d)(k-d)p}{z(z-b)(z-v)}.$$

La première de ces valeurs aura lieu, d'après ce que nous avons vu, dans le cas où

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

ou bien

$$v > d + \frac{k}{pd},$$

la seconde dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

En introduisant ces valeurs de $F(z)$ dans les formules (1) et (2) et en posant $a = 0$, nous trouvons que les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^c f(x)dx$$

que nous cherchons dans le problème considéré, seront données par les formules

$$(8)\quad \left|\begin{aligned} &\int_a^b f(x)dx \geqq \sum_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{k}{p(v-d)}\right)} \\ &\int_a^b f(x)dx \leqq \sum_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{k}{p(v-d)}\right)}, \end{aligned}\right.$$

dans le cas où

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

ou

$$v > d + \frac{k}{pd};$$

et par les formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \sum_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \sum_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

§ 7. Si nous nous arrêtons au cas

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)},$$

nous remarquons que pour telles valeurs de z comprises entre $z = -\omega$ et $z = v \pm \omega$, la fraction

$$\frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{k}{p(v-d)}\right)}$$

ne peut devenir ∞ que pour

$$z = c,$$

vu que la seconde valeur $z = d - \frac{k}{p(v-d)}$, pour laquelle cette fraction devient ∞, surpasse, pour les valeurs considérées de v et pour ω infiniment petit, aussi bien $v + \omega$ que $v - \omega$. Quant à la valeur

$$z = v,$$

elle sera contenue, à cause de l'inégalité

$$\omega > 0,$$

dans les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega,$$

mais elle sera en dehors des limites

$$-\omega, \qquad v - \omega.$$

Par conséquent, pour les valeurs considérées de v, le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduira à zéro, tandis que le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduira au résidu correspondant à $z = v$, qui est égal à

$$\frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Par conséquent, dans le cas où $v < d - \frac{k}{p(b-d)}$ les formules (8) se réduisent aux suivantes:

$$\int_0^v f(x)dx \geqq 0,$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Passant maintenant au cas,

$$v > d + \frac{k}{pd}.$$

Nous remarquons que dans ce cas la valeur

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

pour laquelle la fraction

$$\frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

devient infinie, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \qquad v - \omega$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega$$

tandis que l'autre valeur $z = v$, pour laquelle cette fraction devient aussi ∞, n'est contenue qu'entre les deux dernières limites. Par conséquent le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduit au résidu correspondant à

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

lequel est égal à

$$\frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{v}{p(v-d)}\right)}$$

sera égal à la somme des résidus de la fraction

$$\frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{v}{p(v-d)}\right)}$$

correspondants aux deux valeurs de z, pour lesquelles cette fraction devient infinie. Cette somme est égale à p. Pour ces valeurs des résidus intégraux, les formules (8) nous donnent

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq p.$$

Il nous reste encore à étudier plus en détail le cas où

$$d-\frac{k}{p(b-d)} < v < d+\frac{k}{pd}.$$

Pour ces valeurs de v, les valeurs limites de intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

sont données, d'après le § 6, par les formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)}.$$

Vu que des 3 valeurs

$$z = 0, \qquad z = b, \qquad z = v$$

pour lesquelles la fraction

$$\frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

devient infinie, la première, $z = 0$, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \qquad v - \omega,$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega,$$

la seconde $z = b$ n'est contenue ni entre les premières, ni entre les secondes limites, tandis que la troisième, $z = v$ n'est contenue qu'entre les secondes limites, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

se reduit au résidu correspondant à $z = 0$, lequel est égal à

$$\frac{(b - d)(v - d)p + k}{bv}$$

tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

est égal à la somme des résidus correspondant à $z = 0$ et à $z = v$; ces résidus sont respectivement égaux à

$$\frac{(b - d)(v - d)p + k}{bv},$$

$$\frac{d(b - d)p + k}{(b - v)v};$$

leur somme est donc

$$\frac{(b - d)(b + d - v)p - k}{b(b - v)}.$$

Il résulte par conséquent de ces formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \frac{(b-d)(v-d)p+k}{bv},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \frac{(b-d)(b+d-v)p-k}{b(b-v)}.$$

On voit donc que de l'expression des valeurs limites de l'intégrale $\int_a^v f(x)dx$ à l'aide de résidus intégraux, découlent toutes les formules communiquées dans mon mémoire, inséré dans le Journal de LIOUVILLE sous le titre: *Sur les valeurs limites des intégrales.*

§ 8. Il est facile de s'assurer de l'exactitude des valeurs limites de l'intégrale $\int_a^v f(x)dx$ que nous avons trouvées pour le cas où l'on connaît les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2 f(x)dx, \ \ldots$$

et que de plus la fonction inconnue $f(x)$ reste positive entre a et b, à l'aide de l'équation

$$\int_a^b Uf(x)dx = \mathcal{E}\, UF(z)$$

laquelle aura toujours lieu, en conséquence des propriétés de la fonction rationnelle $F(z)$ déterminée par les formules (3), (4), (6), (7), sitôt que U désigne une fonction entière dont le degré est moindre que le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2 f(x)dx, \ \ldots.$$

Quant à la déduction de ces mêmes formules par la méthode des quantités maxima et minima, cette question sera l'objet d'un mémoire particulier, dans lequel nous montrerons aussi d'autres applications de la fonction rationnelle $F(z)$. On verra entre autre que les deux racines de l'équation

$$\frac{1}{F(z)} = 0$$

les plus rapprochées de la racine

$$x = v$$

fournissent la solution du problème suivant par rapport à la fonction $f(x)$: *dans quelles limites, en partant de $x = v$ ou en finissant par $x = v$, la fonction $f(x)$ peut elle avoir une valeur constante égale à zéro?*

En assignant à v dans les formules qui déterminent $F(z)$ certaines valeurs spéciales, nous trouvons deux fractions $F_1(z)$, $F_2(z)$ telles, que les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{b+\omega} F_1(z)\theta(z), \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{b+\omega} F_2(z)\theta(z)$$

représentent les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\theta(x)dx$$

sous condition, que pour toutes les valeurs de x entre $x = a$ et $x = b$ la fonction $\theta(x)$ reste finie et continue et que sa dérivée, dont l'ordre est égal au nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2f(x)dx, \ \ldots,$$

ne change pas de signe. Si le nombre de ces intégrales est pair, ces valeurs spéciales de $F(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (4) en supposant $v = b$, ou bien v égal à une racine quelconque de l'équation $\psi_m(x) = 0$. Si au contraire le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m}f(x)dx,$$

est impair, les fractions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (6) en supposant $v = a$, $v = b$.

A l'aide des fractions, déterminées par les formules (3), (4), (6), (7) on peut aussi trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

quelles que soient u, v pourvu seulement, que dans les intégrales données l'une des limites soit égale à $\pm\infty$.

SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM ET DE MINIMUM

PROPOSÉE PAR M. TCHEBYCHEFF

PAR

A. MARKOFF

à S:t PÉTERSBOURG.

M. TCHEBYCHEFF à proposé en 1874[1] une question très intéressante relative à certains maxima et minima. Ayant eu occasion d'approfondir cette matière, je me permets d'exposer ici les considérations qui m'ont amené à la résolution de la question de M. TCHEBYCHEFF d'une manière qui me semble être très générale.

Notations et conditions:

1) $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_{n+1}(z), \Omega(z)$ sont des fonctions données de z;

2) je pose

$$D_k = \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & , \lambda_2(z) & , \ldots, & \lambda_k(z) \\ \lambda_1'(z) & , \lambda_2'(z) & , \ldots, & \lambda_k'(z) \\ \lambda_1''(z) & , \lambda_2''(z) & , \ldots, & \lambda_k''(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(k-1)}(z), & \lambda_2^{(k-1)}(z), & \ldots, & \lambda_k^{(k-1)}(z) \end{vmatrix}, \qquad \lambda_k^{(i)}(z) = \frac{d^i \lambda_k(z)}{dz^i}$$

3) et

$$\Delta_k(\Omega) = \begin{vmatrix} \lambda_1(z) , & \lambda_2(z) , & \ldots, & \lambda_k(z) , & \Omega(z) \\ \lambda_1'(z) , & \lambda_2'(z) , & \ldots, & \lambda_k'(z) , & \Omega'(z) \\ \lambda_1''(z), & \lambda_2''(z), & \ldots, & \lambda_k''(z), & \Omega''(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(k)}(z), & \lambda_2^{(k)}(z), & \ldots, & \lambda_k^{(k)}(z), & \Omega^{(k)}(z) \end{vmatrix};$$

[1] *Sur les valeurs limites des intégrales* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1874).

4) a et b sont des nombres donnés,

5) $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ des nombres positifs et indéterminés,

6) $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ des nombres indéterminés compris entre a et b,

7) ν restant aussi indéterminé,

8) et on a

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \ldots, \quad D_{n+1} > 0$$

$$\Omega > 0, \quad \Delta_1(\Omega) > 0, \quad \Delta_2(\Omega) > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{n+1}(\Omega) > 0$$

pour toutes les valeurs de z comprises entre a et b.

Le but final de cette note est la résolution de la question suivante:

Il faut trouver les nombres

$$\nu, \quad m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \quad y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

tels que les sommes

$$\sum m_i\lambda_1(y_i), \quad \sum m_i\lambda_2(y_i), \quad \ldots, \quad \sum m_i\lambda_{n+1}(y_i) \quad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,\nu)}$$

aient des valeurs prises à priori

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$$

et en même temps tels que la somme

$$\sum m_i\Omega(y_i),$$

étendue aux valeurs de y_i, qui ne dépassent pas une certaine limite v ($a < v < b$), soit maximum ou minimum.

Remarque 1. Nous supposons d'abord que les équations

$$\sum m_i\lambda_1(y_i) = \alpha_1, \quad \sum m_i\lambda_2(y_i) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \sum m_i\lambda_{n+1}(y_i) = \alpha_{n+1}$$

sont compatibles.

Remarque 2. Pour plus de facilité on peut exprimer les sommes considérées de la manière suivante

$$\sum_a^b m\lambda_1(y), \quad \sum_a^b m\lambda_2(y), \quad \ldots, \quad \sum_a^b m\lambda_{n+1}(y), \quad \sum_a^b m\Omega(y)$$

et avec ça rien ne nous empêche d'étendre ces sommes à toutes les valeurs de y comprises entre a et b ou bien entre a et v: il suffit seule-

ment de prendre m égal à zéro pour toutes les valeurs de y excepté $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. Remarquons qu'en résolvant la question proposée, nous obtenons en même temps les limites exactes de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \Omega(y) f(y) dy,$$

lorsque les valeurs des intégrales

$$\int_a^b \lambda_1(y) f(y) dy, \qquad \int_a^b \lambda_2(y) f(y) dy, \quad \ldots, \quad \int_a^b \lambda_{n+1} f(y) dy$$

sont données et qu'aucune fonction $f(y)$ ne peut devenir négative entre les limites de l'intégration:

Formule importante:[1]

$$D_{k-1} \cdot \Delta_k(\Omega) = D_k \cdot \frac{d\Delta_{k-1}(\Omega)}{dz} - \frac{dD_k}{dz} \cdot \Delta_{k-1}(\Omega)$$

ou bien

$$\Delta_k(\Omega) = \frac{D_k^2}{D_{k-1}} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\Delta_{k-1}(\Omega)}{D_k}\right).$$

Théorème 1. Quelles que soient les valeurs des constantes

$$p_k, \; p_{k+1}, \; p_{k+2}, \; \ldots, \; p_{n+1}$$

l'équation

$$p_k \Delta_{k-1}(\lambda_k) + p_{k+1} \Delta_{k-1}(\lambda_{k+1}) + \ldots + p_{n+1} \Delta_{k-1}(\lambda_{n+1}) = 0$$

ne peut pas avoir plus de $n - k + 1$ racines entre a et b.

Démonstration. Désignons le premier membre de notre équation par $\Phi_{k-1}(z)$. En vertu de la formule précédente on a

$$\frac{D_k^2}{D_{k-1}} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi_{k-1}(z)}{D_k}\right) = p_{k+1} \Delta_k(\lambda_{k+1}) + \ldots + p_{n+1} \Delta_k(\lambda_{n+1}) = \Phi_k(z)$$

et par conséquent dans l'intervalle entre a et b le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

[1] Brioschi, *Théorie des déterminants*, 1856. Formules 14 et 93.

ne peut dépasser le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

que d'une unité.

Pour la même raison le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

dans l'intervalle entre a et b ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k+1}(z) = 0$$

dans le même intervalle.

En répétant successivement les mêmes considérations nous arrivons enfin à l'équation

$$p_{n+1} D_{n+1} = 0$$

qui n'a point de racines dans l'intervalle entre a et b.

Or le nombre des racines de l'équation primitive

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

dans l'intervalle de a à b ne peut surpasser que de $n - k + 1$ unités le nombre des racines de la dernière équation

$$p_{n+1} D_{n+1} = 0.$$

Notre théorème en résulte immédiatement.

Corollaire. Quels que soient les nombres

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-\mu+1}$$

compris entre a et b et les nombres

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-\mu+1}, \qquad B_1, B_2, \dots, B_\mu$$

avec la condition $n - \mu + 1 \geqq \mu$, il existe seulement un système de valeurs des coefficients

$$p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$$

pour lequel la fonction

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \dots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z)$$

satisfait aux équations

$$\Phi(y_1) = A_1, \quad \Phi(y_2) = A_2, \; \ldots, \; \Phi(y_\mu) = A_\mu, \; \ldots, \; \Phi(y_{n-\mu+1}) = A_{n-\mu+1}$$
$$\Phi'(y_1) = B_1, \quad \Phi'(y_2) = B_2, \; \ldots, \; \Phi'(y_\mu) = B_\mu.$$

Théorème 2. Conservant les notations du théorème précédent, nous pouvons affirmer, que le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = \Delta_{k-1}(\Omega)$$

comprises entre a et c $(a < c < b)$ augmenté du nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

comprises entre c et b ne peut être plus grand que $n - k + 2$.

Démonstration. Admettons que les racines des équations

$$\Phi_{k-1}(z) = \Delta_{k-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \Phi_{k-1}(z) = 0,$$

étant rangées par ordre croissant, sont

$$x_1^{(k-1)}, \; x_2^{(k-1)}, \; \ldots, \; x_g^{(k-1)} \quad \text{pour la première équation et}$$
$$x_{g+1}^{(k-1)}, \; x_{g+2}^{(k-1)}, \; \ldots, \; x_{g+h}^{(k-1)} \quad \text{pour la seconde.}$$

Pour $g \overline{\overline{<}}\, 1$ notre théorème se ramène au précédent. Mais lorsqu'on a $g > 1$, il est bien facile de voir que l'équation

$$\Phi_k(z) = \Delta_k(\Omega)$$

aura $g - 1$ racines

$$x_1^{(k)}, \; x_2^{(k)}, \; \ldots, \; x_{g-1}^{(k)}$$

dans l'intervalle de a à $x_g^{(k-1)}$ et que l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

devra contenir $h - 1$ racines comprises entre $x_{g+1}^{(k-1)}$ et h et encore une racine entre $x_{g-1}^{(k)}$ et $x_{g+1}^{(k-1)}$.

Poussant plus loin les mêmes raisonnements nous arrivons enfin à nous convaincre que l'équation

$$\Phi_{k+g-2}(z) = 0$$

doit avoir h racines entre a et b.

Il en résulte, qu'en vertu du théorème précédent nous avons

$$h < n - k - g + 2$$

et

$$h + g \leqq n - k + 2;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Etant donnés, dans l'intervalle entre a et b, $n + 1$ nombres

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_l < x_{l+1} < \ldots < x_{n+1}$$

dont les l premiers satisfont à l'équation

$$\Phi(z) = \Omega(z)$$

tandis que les $n - l + 1$ autres nombres satisfont à l'équation

$$\Phi(z) = 0,$$

on peut alors se convaincre, que l'on aura toujours

$$\begin{array}{rcr}
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{pour} & x_l < z < x_{l+1} \\
\Phi(z) > \Omega(z) & \text{pour} & x_{l-1} < z < x_l. \\
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{pour} & x_{l-2} < z < x_{l-1} \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
(-1)^l \Phi(z) > (-1)^l \Omega(z) & \text{pour} & x_1 < z < x_2 \\
(-1)^{l+1} \Phi(z) > (-1)^{l+1} \Omega(z) & \text{pour} & a < z < x_1 \\
\Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_l < z < x_{l+1} \\
\Phi(z) < 0 & \text{pour} & x_{l+1} < z < x_{l+2} \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
(-1)^{n-l} \Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_n < z < x_{n+1} \\
(-1)^{n-l+1} \Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_{n+1} < z < b.
\end{array}$$

Donnant maintenant à quelques-uns des nombres

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$$

des valeurs de plus en plus rapprochées jusqu'à la formation de racines multiples, il n'est point difficile de déduire des propositions d'une assez grande importance.

Théorème 3. Lorsqu'on a $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}}$$

compris entre a et b et encore $\frac{n+1}{2} + 1$ nombres positifs

$$M,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}},$$

n étant impair, on aura toujours les inégalités

$$\begin{aligned} \sum_a^{x_i} m\Omega(y) &< M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i) \\ &> M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) \end{aligned}$$

pour chaque système de nombres m et y satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b$$

$$\sum_a^b m\lambda_k(y) = M\lambda_k(a) + M_1\lambda_k(x_1) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z) \\ \Psi(z) &= q_1\lambda_1(z) + q_2\lambda_2(z) + \ldots + q_{n+1}\lambda_{n+1}(z) \end{aligned}$$

et déterminons les constantes

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n+1}, \qquad q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n+1}$$

conformément aux conditions

$$\begin{array}{ll} \Phi(a) = \Psi(a) = \Omega(a), & \\ \Phi(x_1) = \Psi(x_1) = \Omega(x_1), & \Phi'(x_1) = \Psi'(x_1) = \Omega'(x_1) \\ \Phi(x_2) = \Psi(x_2) = \Omega(x_2), & \Phi'(x_2) = \Psi'(x_2) = \Omega'(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi(x_{i-1}) = \Psi(x_{i-1}) = \Omega(x_{i-1}), & \Phi'(x_{i-1}) = \Psi'(x_{i-1}) = \Omega'(x_{i-1}) \\ \Phi(x_i) = \Omega(x_i),\ \Psi(x_i) = 0, & \\ \Phi(x_{i+1}) = \Psi(x_{i+1}) = 0, & \Phi'(x_{i+1}) = \Psi'(x_{i+1}) = 0 \\ \Phi(x_{i+2}) = \Psi(x_{i+2}) = 0, & \Phi'(x_{i+2}) = \Psi'(x_{i+2}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi(x_{\frac{n+1}{2}}) = \Psi(x_{\frac{n+1}{2}}) = 0, & \Phi'(x_{\frac{n+1}{2}}) = \Psi'(x_{\frac{n+1}{2}}) = 0. \end{array}$$

On a alors premièrement, d'après le corollaire du théorème précédent

$$\sum_a^b m\Phi(y) > \sum_a^{x_i} m\Phi(y) > \sum_a^{x_i} m\Omega(y) > \sum_a^{x_i} m\Psi(y) > \sum_a^b m\Psi(y)$$

et d'autre part il est facile de voir que

$$\sum_a^b m\Phi(y) = M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i)$$

et

$$\sum_a^b m\Psi(y) = M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}).$$

D'où résultent immédiatement nos inégalités citées ci-dessus.

Théorème 4. Lorsqu'on a $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}}$$

compris entre a et b et encore $\frac{n+1}{2} + 1$ nombres positifs

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}},\ M',$$

n étant impair, on aura toujours les inégalités

$$\begin{aligned}\sum_a^{x_i} m\Omega(y) &< M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i)\\ &> M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1})\end{aligned}$$

pour chaque système de nombres m et y, satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b,$$

$$\sum_a^b m\lambda_k(y) = M_1\lambda_k(x_1) + M_2\lambda_k(x_2) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}) + M'\lambda_k(b).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

La démonstration de ce théorème est la même que celle du précédent.

Théorème 5. Si, n étant impair, il y avait un des $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$$

$$(a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}} \leq b)$$

égal à a ou à b et en même temps si

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}}$$

étaient des nombres positifs, il n'y aurait alors qu'un système de nombres m et y satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b,$$

$$\sum m\lambda_k(y) = M_1\lambda_k(x_1) + M_2\lambda_k(x_2) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}),$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

savoir

$$y = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$$

$$m = M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}}.$$

Ce dernier théorème peut être déduit des précédents comme un cas particulier.

Il peut encore être démontré indépendamment par la méthode précédente.

Remarque 1. Il est évident que tous nos théorèmes ont lieu aussi dans le cas, où a et b sont remplacés par d'autres quantités a' et b' satisfaisant à la condition

$$a < a' < b' < b.$$

Remarque 2. Pour la résolution complète de notre question il faudrait donner encore quelques théorèmes semblables aux précédents.

Nous nous bornerons cependant aux théorèmes cités ci-dessus, parce que nous avons en vue de considérer seulement le cas, où n est impair et v n'est pas égal à b.

La résolution de la question posée, dans le cas de n impair et $v < b$, consiste dans la proposition suivante:

Les maximum et minimum cherchés de la somme

$$\sum_{a}^{} m\Omega(y)$$

correspondent au cas entièrement défini où m n'est différent de zéro que

pour $\frac{n+1}{2}+1$ valeurs de y, parmi lesquelles se trouvent v et un des nombres a et b.

Or le maximum ne diffère du minimum que d'un terme de toute somme $\sum_a^v m\Omega(y)$, précisément du terme, qui correspond à la valeur $y=v$; pour avoir le maximum il faut introduire ce terme dans la somme, pour le minimum il ne faut pas l'introduire.

Démonstration. L'existence du maximum et du minimum est considérée comme évidente à priori, comme on le fait souvent dans d'autres cas.

Démontrons maintenant que dans tous les cas excepté dans le cas ci-dessus on peut augmenter ou diminuer la somme $\sum_a^v m\Omega(y)$ à volonté.

Remarquons encore qu'en comparant les deux sommes nous allons souvent y laisser de côté les termes communs en diminuant d'après cela le nombre des termes.

Premier cas. Etant donné $\nu'=\frac{n+1}{2}$, soient

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_{\nu'+1}$$

des valeurs de y différentes entre elles, auxquelles correspondent des valeurs positives de m

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{\nu'+1}.$$

Supposons encore que l'on a

$$y_i < v < y_{i+1}.$$

On peut donner aux nombres

$$y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{\nu'+1}, \qquad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{\nu'+1}$$

quelques accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu'+1}, \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu'+1}$$

et afin que les sommes

$$\sum_a^b m\lambda_1(y), \qquad \sum_a^b m\lambda_2(y), \quad \ldots, \quad \sum_a^b m\lambda_{n+1}(y)$$

restent sans changement, ces accroissements doivent satisfaire aux équations

$$(m_1+\mu_1)\lambda_k(y_1)+(m_2+\mu_2)\lambda_k(y_2+\varepsilon_2)+\ldots+(m_{\nu+1}+\mu_{\nu+1})\lambda_k(y_{\nu+1}+\varepsilon_{\nu+1})$$
$$=m_1\lambda_k(y_1)+m_2\lambda_k(y_2)+\ldots+m_{\nu+1}\lambda_k(y_{\nu+1}). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,\ldots,n+1)}$$

L'accroissement correspondant de la somme

$$\sum_a^r m\Omega(y)$$

est égal à

$$(m_1+\mu_1)\Omega(y_1)+(m_2+\mu_2)\Omega(y_2+\varepsilon_2)+\ldots+(m_i+\mu_i)\Omega(y_i+\varepsilon_i)$$
$$-m_1\Omega(y_1)-m_2\Omega(y_2)-\ldots-m_i\Omega(y_i).$$

Les équations précédentes ne déterminent que les rapports réciproques des accroissements

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu+1}, \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu+1}$$

de manière qu'on peut prendre l'un de ces accroissements comme arbitraire.

On peut encore se convaincre à l'aide du théorème 5, que toutes les quantités infiniment petites

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu-1}$$

sont d'un même ordre et les quantités

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu+1}$$

sont du même ordre ou bien quelques-unes de ces dernières peuvent être d'un ordre supérieur.

Par conséquent ε_i peut être pris à volonté positif ou négatif.

Si l'on a $\varepsilon_i>0$, alors d'après le théorème 3 (remplaçant a par y_1) l'accroissement de la somme $\sum_a^r m\Omega(y)$ devient positif; au cas contraire il sera négatif.

Cette transformation peut être pratiquée aussi dans le cas, où $y_1=a$.

Mais si l'on a $y_{\nu+1}=b$, cette transformation n'est plus possible, parce qu'alors il est impossible de changer le signe de $\varepsilon_{\nu+1}$ à volonté ($\varepsilon_{\nu+1}\leq 0$).

Dans ce cas on peut en vertu du théorème 4 augmenter ou diminuer la somme $\sum_a^v m\Omega(y)$ en faisant varier les valeurs de

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \qquad m_1, m_2, \ldots, m_{\nu+1}.$$

Quant au cas de $y_1 = a$ et $y_{\nu+1} = b$, nous le considérons à part.

Le second cas ne diffère du précédent que par

$$y_1 = a \quad \text{et} \quad y_{\nu+1} = b.$$

Désignons par $m^{(v)}$ la valeur de m correspondante à $y = v$. On peut donner aux nombres

$$y_2, y_3, \ldots, y_\nu, \qquad m_1, m_2, \ldots, m_{\nu+1}, m^{(v)}$$

des accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu, \qquad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu+1}, \mu^{(v)}$$

satisfaisant aux équations

$$(m_1 + \mu_1)\lambda_k(y_1) + (m_2 + \mu_2)\lambda_k(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_\nu + \mu_\nu)\lambda_k(y_\nu + \varepsilon_\nu)$$
$$+ (m_{\nu+1} + \mu_{\nu+1})\lambda_k(y_{\nu+1}) + \mu^{(v)}\lambda_k(v) = m_1\lambda_k(y_1) + m_2\lambda_k(y_2) + \ldots + m_{\nu+1}\lambda_k(y_{\nu+1}).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

Le nombre de nos équations est moindre d'une unité que celui des accroissements.

Cependant dans ce cas il est impossible de changer les signes des accroissements car $m^{(v)}$ peut être égal à zéro et par conséquent on doit poser

$$\mu^{(v)} > 0$$

afin que la somme $m^{(v)} + \mu^{(v)}$ soit absolument positive. Or d'après le théorème 5 on peut démontrer, que

$$\mu_1 < 0 \quad \text{et} \quad \mu_{\nu+1} < 0.$$

Quant à l'accroissement de la somme $\sum_a m\Omega(y)$, il peut être pris à volonté égal à l'expression

$$(m_2 + \mu_2)\Omega(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_i + \mu_i)\Omega(y_i + \varepsilon_i) + \mu^{(v)}\Omega(v)$$
$$- (-\mu_1)\Omega(y_1) - m_2\Omega(y_2) - \ldots - m_i\Omega(y_i)$$

ou à l'expression

$$(m_2 + \mu_2)\,\Omega(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_i + \mu_i)\Omega(y_i + \varepsilon_i)$$
$$- (-\mu_1)\Omega(y_1) - m_2\Omega(y_2) - \ldots - m_i\Omega(y_i).$$

La première de ces expressions est positive d'après le théorème (4) et la seconde est négative.

Troisième cas. Soient

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_\nu$$

des valeurs différentes de y, auxquelles correspondent des valeurs positives de m

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_\nu.$$

Nous supposons de plus qu'aucune de ces valeurs de y n'est égale ni à a ni à b.

Comme dans ce qui précède on peut donner aux nombres

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\nu, \qquad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_\nu,\ m^{(v)}$$

des accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_\nu, \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\nu,\ \mu^{(v)},$$

$$\mu^{(v)} \text{ étant } > 0.$$

Il est facile de conclure d'après le théorème 5 que l'on a

$$\varepsilon_1 < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_\nu \gtrless 0.$$

Ensuite d'après les théorèmes 3 et 4, comme nous l'avons fait auparavant, nous déduisons qu'on peut augmenter ou diminuer à volonté la somme

$$\sum_a^v m\Omega(y)$$

Conclusion. Ayant égard aux résultats de nos considérations, il n'est pas difficile de voir, comme nous l'avons dit, que les maximum et minimum cherchés ne peuvent avoir lieu que dans le cas, où

$$\nu = \frac{n+1}{2} + 1$$

et en même temps où se trouvent parmi les quantités

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

la valeur v et une des valeur a et b. Effectivement les théorèmes 3 et 4 nous montrent que dans ce cas la somme $\sum_a^r m\Omega(y)$ atteint le maximum ou le minimum selon que nous comptons ou ne comptons pas la quantité $m^{(r)}\Omega(v)$ appartenant à ses termes.

Remarque. D'une manière analogue à ce qui précède on peut donner la résolution de notre question dans les cas, où on a $v = b$ ou bien n étant pair.

Remarquons encore que dans mon mémoire *sur quelques applications des fractions continues* [1] j'ai discuté le cas particulier où

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = z, \quad \ldots, \quad \lambda_{n+1}(z) = z^n.$$

Dans ce cas les inconnues

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

se déterminent comme les racines d'une certaine équation algébrique.

Quant aux inconnues

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu$$

on les détermine à l'aide d'un système d'équations du premier degré par les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

trouvées auparavant.

S:t Pétersbourg, Janvier 1886.

---

[1] МАРКОВЪ, А., О нѣкоторыхъ приложенияхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. С.-Петербургъ 1884.

SUR UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

GINO LORIA

À MANTOUE.

La démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques, que M. HOLST vient d'exposer dans les Acta mathematica (T. 8, p. 155 et suiv.) n'est pas nouvelle quant au fond. En effet, dans un ouvrage — peut-être peu répandu — qui a paru pour la première fois en 1828 et dont la seconde édition a été publiée il y vingt-cinq ans sous le titre *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Dédié aux amis de l'évidence par C. V. MOUREY* (Paris, Mallet-Bachelier, 1861), on en trouve une qui est tout-à-fait semblable à celle du savant norvégien.[1]

Les seules différences qu'on remarque entre le raisonnement de M. HOLST et celui de MOUREY consistent dans l'ordre et dans le cachet géométrique qu'y a donné ce dernier. Il débute en effet (p. 76) en se posant le problème: Etant donnés de position dans un plan plusieurs points en nombre quelconque, trouver un point de ce plan tel que, si l'on tire les chemins[2] qui le joignent aux points donnés, leur produit soit égal à un chemin donné; et il remarque ensuite que, si l'un des points donnés représente le nombre 0 (hypothèse toujours réalisable), la solution du pro-

[1] Comp. LIOUVILLE, *Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques*, (Journal de mathématiques, T. IV, 1839).

[2] »Chemin» a ici la même signification que le mot allemand »Strecke».

blème dépend de la résolution d'une équation de degré égal au nombre des points donnés et de la forme suivante:

$$(A) \qquad x(b + x)(c + x) \ldots = g.$$

Il ajoute: »Si tout problème de cette nature peut être résolu au moins d'une manière et si toute équation à une seule inconnue est la traduction d'un problème de cette nature (c'est-à-dire si elle peut se mettre sous la forme (A)), il s'ensuivra que toute équation a au moins une racine.»

Or, pour prouver la première de ces propositions, il décompose l'équation (A) en deux autres qui ne sont autre chose que la *Modulgleichung* et l'*Argumentgleichung* de M. Holst, et il montre (par des raisonnements qui offrent une analogie saisissante avec ceux de M. Holst) qu'elles ont au moins une solution; pour démontrer la seconde des propositions précédentes, il fait voir qu'elle revient à admettre qu'une équation de degré $n - 1$ a $n - 1$ racines. C'est le point de départ de M. Holst, tandis qu'on peut dire que la base du raisonnement de Mourey est l'équation (1) du mémoire de ce géomètre.

Je crois que ces indications seront suffisantes pour justifier la remarque faite par moi au début de cette petite note.

Mantoue, 15 Juillet 1886.

DIE FLÄCHEN CONSTANTER KRÜMMUNG MIT EINEM SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN DARGESTELLT MIT HILFE VON THETAFUNCTIONEN ZWEIER VARIABELN

VON

HERMANN DOBRINER
in FRANKFURT a/M.

Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien hat zuerst ENNEPER[1] untersucht. Zur analytischen Darstellung derselben verwendet er drei Functionen einer Veränderlichen u, die erst durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu finden sind.

Zwei von diesen Functionen, in der ENNEPER'schen Abhandlung mit p und q bezeichnet, genügen zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung,[2] für welche die beiden ersten Integrale bekannt sind.[3] Die dritte Function φ ist eine particuläre, keine willkürliche Constante enthaltende Lösung der Differentialgleichung[4]

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\varphi}{du} = \frac{p}{gq} - \frac{\cos\varphi}{q}.$$

[1] Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen aus dem Jahre 1868, p. 421—443.

[2] a. a. O., p. 425, Gleichungssystem (7).

[3] a. a. O., p. 426, (10) und p. 431, vierte Gleichung von (26).

[4] a. a. O., p. 426, (11).

In dieser bedeutet g die Constante, deren reciprokem Quadrat das positiv angenommene Krümmungsmass der gesuchten Fläche gleich ist.

Die Integration dieser drei Differentialgleichungen hat Enneper nicht ausgeführt. Er bemerkt am Schlusse seiner Abhandlung: *Die Bestimmung von p, q und φ in Function von u scheint auf grosse Schwierigkeiten zu stossen.* Auch von anderer Seite ist, soweit mir bekannt, die Lösung des Problems nicht weiter geführt worden.

Mir war bereits vor längerer Zeit die Integration der Gleichungen für p und q gelungen. Ich fand, dass diese Grössen als Quotienten von ϑ-Functionen zweier Veränderlichen darstellbar sind. Dieses Resultat liess es aber kaum wahrscheinlich erscheinen, dass auch die directe Integration der Gleichung für φ gelingen werde.

Die Beschäftigung mit der allgemeinen Theorie der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien liess mich indessen erkennen, dass jene Gleichung in gewissem Sinne nur von secundärer Bedeutung ist.

Wenn die Mittelpunkte der die sphärischen Krümmungslinien osculirenden Kugeln sämmtlich auf einer Geraden liegen — und das ist bei den Flächen constanter Krümmung der Fall — so ist, wie ich nachgewiesen habe,[1] zur Darstellung der Fläche in erster Reihe die Kenntniss zweier Systeme von je 9 Grössen erforderlich, zwischen denen die Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution bestehn. Geometrisch besagt dieses, dass man zwei (imaginäre) Raumcurven zu bestimmen hat, die in den Richtungscosinus ihrer Tangenten, Haupt- und Binormalen jene orthogonalen Systeme liefern.

Sind für eine dieser Curven der Krümmungsradius und der Radius der Torsion in Function der unabhängigen Variabeln u gegeben, so erwächst die Aufgabe die Werthe der erwähnten neun Richtungscosinus zu bestimmen. Und diese Aufgabe führt auf eine Gleichung von der Form[2]

$$\frac{d\varphi}{du} = f(u) + f_1(u)\cos\varphi .$$

Bei Enneper kommen nun die imaginären Hilfscurven zwar noch nicht zur Verwendung. Aber die Gleichung (a) dient doch wesentlich

[1] Crelle's Journal, Bd. 94, p. 153—155.

[2] Vgl. darüber die Abhandlung von Hoppe, Crelle's Journal, Bd. 63, p. 122.

zur Aufsuchung der Elemente der einen Curve, für welche in p und q Grössen bestimmt sind, die mit ihrem Krümmungs- und Torsionsradius in einfachem Zusammenhange stehn. Die Integration von (a) wäre demnach nicht zu umgehn, wenn man nicht auf andere Weise zu dem gesuchten Orthogonal-Systeme gelangen könnte. Nun legt aber der Umstand, dass p und q ϑ-Quotienten gleich sind, die Vermuthung nahe, dass dasselbe mit dem bekannten aus den 9 Quotienten der graden ϑ-Functionen gebildeten Orthogonal-Systeme identisch sei. Und diese Vermuthung findet sich bestätigt.

Die Elemente der zweiten Hilfscurve lassen sich durch ϑ-Functionen einer Variabeln darstellen, wie nach den Ergebnissen der Enneper'schen Arbeit vorauszusehn war.

Die folgende Untersuchung geht nur anfangs den von Enneper eingeschlagenen Weg; sie schliesst sich der in meiner oben angeführten Arbeit — die ich in Citaten kurz mit *F.* bezeichnen will — gegebenen Darstellung der Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien an.

§ 1.

Unter dem Parameter v war in *F.* die Länge des Bogens der Mittelpunktscurve, gemessen von einem beliebigen Anfangspunkte bis zum Centrum einer Osculationskugel, verstanden. Jetzt soll über v in anderer Weise verfügt werden; deshalb ersetze ich überall v durch V.

Bezeichnet man

$$\frac{1}{p}\frac{dV}{dv} \text{ mit } q_1, \qquad \frac{1}{q}\frac{dV}{dv} \text{ mit } q_2,$$

$$\frac{1}{w_1} \text{ mit } p_1 \text{ und } \frac{1}{w_2} \text{ mit } p_2,$$

so lässt sich das Ergebniss des Abschnitts III d) (*F.* p. 153—155) hinsichtlich der Flächen mit gradliniger Mittelpunktscurve kurz wie folgt darstellen.

Man bestimme zwei Systeme von je 9 Grössen, l_h, m_h, n_h und

λ_h, μ_h, ν_h, ($h = 1, 2, 3$), die einzeln den Bedingungsgleichungen einer Orthogonal-Substitution und den Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dl_h}{dv} = iq_1 n_h, \qquad \frac{dm_h}{dv} = q_2 n_h, \qquad \frac{dn_h}{dv} = -iq_1 l_h - q_2 m_h \qquad (h=1,2,3)$$

und

$$(2) \qquad \frac{d\lambda_h}{du} = ip_1\mu_h + ip_2\nu_h, \qquad \frac{d\mu_h}{du} = -ip_1\lambda_h, \qquad \frac{d\nu_h}{du} = -ip_2\lambda_h$$

genügen. In den letzteren sind q_1, q_2 zwei willkürliche Functionen von v und p_1, p_2 zwei willkürliche Functionen von u. Die Grössen l, m, n hängen allein von der Variabeln v, die λ, μ, ν allein von u ab.

Führt man ein drittes Orthogonal-System x_h, y_h, z_h durch die Gleichungen (F. 63)

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & x_2 = i\dfrac{\Sigma_h l_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & x_3 = i\dfrac{\Sigma_h l_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \\[2ex] y_1 = i\dfrac{\Sigma_h n_h\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & y_2 = -\dfrac{\Sigma_h m_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & y_3 = \dfrac{\Sigma_h m_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \\[2ex] z_1 = -i\dfrac{\Sigma_h m_h\lambda_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & z_2 = -\dfrac{\Sigma_h n_h\nu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h}, & z_3 = \dfrac{\Sigma_h n_h\mu_h}{\Sigma_h l_h\lambda_h} \end{cases}$$

$$(h = 1, 2, 3)$$

ein und bestimmt unter Benutzung einer weitern willkürlichen Function von v, V, die Grössen $R\sin\sigma$ und $R\cos\sigma$ durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} R\sin\sigma = \dfrac{1}{q_1}\dfrac{dV}{dv}, \\[2ex] \dfrac{dR\cos\sigma}{dv} = \dfrac{q_2}{q_1}\dfrac{dV}{dv}, \end{cases}$$

so wird durch

$$(5) \qquad \begin{cases} X_1 - V = z_1 \,.\, R\cos\sigma - y_1 \,.\, R\sin\sigma, \\ X_2 \phantom{{}-V} = z_2 \,.\, R\cos\sigma - y_2 \,.\, R\sin\sigma, \\ X_3 \phantom{{}-V} = z_3 \,.\, R\cos\sigma - y_3 \,.\, R\sin\sigma \end{cases}$$

eine Fläche dargestellt, deren Krümmungslinie v auf einer Kugel mit

dem Radius R liegt. Diese Kugel hat ihr Centrum auf der Axe der x_1 im Abstande V vom Nullpunkt und schneidet die Fläche unter dem Winkel σ.

Differentiirt man die in (3) gegebenen Grössen x_h, y_h, z_h nach u und nach v, so gelangt man zu den Gleichungssystemen (F. 4^a und 4^b) und findet für M, P, N und Q die Werthe:

$$(6)\quad \left|\begin{aligned} M &= -p_1 y_2 - p_2 y_3,\\ P &= -p_1 z_2 - p_2 z_3,\\ N &= \quad q_1 x_1,\\ Q &= -q_1 z_1 - q_2. \end{aligned}\right.$$

Ebenso liefert die Differentiation der Coordinaten X_1, X_2, X_3 in Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{\partial X_h}{\partial u} = f x_h \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_h}{\partial v} = g y_h$$

die Ausdrücke

$$(7)\quad \left|\begin{aligned} f &= P.R\cos\sigma - M.R\sin\sigma,\\ g &= Q.R\cos\sigma + \frac{dV}{dv}y_1 - \frac{dR\sin\sigma}{dv}. \end{aligned}\right.$$

Ist l'_h, m'_h, n'_h ein zweites Orthogonal-System, welches den Gleichungen (1) genügt, so muss es mit l_h, m_h, n_h durch eine lineare Substitution von der Form:

$$\begin{aligned} l'_h &= \alpha_{h1} l_1 + \alpha_{h2} l_2 + \alpha_{h3} l_3,\\ m'_h &= \alpha_{h1} m_1 + \alpha_{h2} m_2 + \alpha_{h3} m_3, \qquad (h=1,2,3)\\ n'_h &= \alpha_{h1} n_1 + \alpha_{h2} n_2 + \alpha_{h3} n_3 \end{aligned}$$

verbunden sein. Ersetzt man in den Gleichungen (3) überall l_h, m_h, n_h durch l'_h, m'_h, n'_h, so geht in diesen nur die Veränderung vor, dass an Stelle der λ_h, μ_h, ν_h lineare Functionen derselben, λ'_h, μ'_h, ν'_h, treten, die sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \lambda'_h &= \alpha_{1h}\lambda_1 + \alpha_{2h}\lambda_2 + \alpha_{3h}\lambda_3,\\ \mu'_h &= \alpha_{1h}\mu_1 + \alpha_{2h}\mu_2 + \alpha_{3h}\mu_3, \qquad (h=1,2,3)\\ \nu'_h &= \alpha_{1h}\nu_1 + \alpha_{2h}\nu_2 + \alpha_{3h}\nu_3. \end{aligned}$$

Hieraus ziehen wir einen wichtigen Schluss. Wenn q_1 und q_2 gegebene Functionen sind und man l_h, m_h, n_h durch Integration der Gleichungen (1) zu finden hat, so ist es ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gestattet, für dieselben ein beliebiges particulares System von Integralgleichungen zu wählen, wenn nur für λ_h, μ_h, ν_h die vollständigen Integralgleichungen des Systems (2) zur Verfügung stehn.

Geht man dazu über die Constanz des Krümmungsmasses als Bedingung einzuführen, so hat man der Untersuchung zunächst die allgemeinen Formeln des Abschnitts (*F.* I.) zu Grunde zu legen, die sich auf Flächen mit doppeltgekrümmter Mittelpunktscurve beziehen, und mit dem Nachweise zu beginnen, dass es eine Folge obiger Bedingung ist, dass die Centra der osculirenden Kugeln auf einer Geraden liegen.

Die über den Parameter v getroffene specielle Verfügung hat, wie man leicht erkennt, für die Gleichungen (*F.* 1) bis (*F.* 9) nur die eine Folge gehabt, dass $\frac{dX_h^0}{dv}$ dem Richtungscosinus $(\cos a_h)$ einer Linie gleich gesetzt werden konnte. Schreibt man daher überall $\frac{dX_h^0}{dv}$ für $\cos a_h$, so sind jene Formeln ohne weiteres anwendbar.

Da die Hauptkrümmungsradien der Fläche

$$\rho_1 = \frac{f}{P} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \frac{g}{Q}$$

sind, so hat die Gleichung

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = k$$

die andere

$$(8) \qquad PQ = kfg$$

zur Folge. Multiplicirt man diese mit jeder der beiden folgenden

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{g}\frac{\partial f}{\partial v} \quad (= M),$$

$$\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial u} \quad (= -N),$$

so erhält man durch Integration

$$P^2 = kf^2 + F(u),$$
$$Q^2 = kg^2 + \Phi(v).$$

Wenn man aber die neuen Variabeln u_1 und v_1 durch die Gleichungen

$$du_1 = du\sqrt{-kF}, \qquad dv_1 = dv\sqrt{\Phi}$$

einführt, so gehn gleichzeitig

$$f, \qquad P, \qquad g, \qquad Q$$

in

$$f_1\sqrt{-kF}, \qquad P_1\sqrt{-kF}, \qquad g_1\sqrt{\Phi}, \qquad Q\sqrt{\Phi}$$

über, und obige Gleichungen liefern in Verbindung mit (8) die einfachen Relationen

$$(9) \qquad \left| \begin{aligned} P &= g, \\ Q &= kf, \\ Q^2 - kP^2 &= 1. \end{aligned} \right.$$

In diesen haben wir den Index 1 wieder fortgelassen, wie wir auch an Stelle von u_1, v_1 wieder u, v schreiben.

Die erste Gleichung (7) kann nun in der Form:

$$(10) \qquad M = P\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{Q}{kR\sin\sigma}$$

geschrieben werden; hieraus folgt wegen

$$M = \frac{1}{Q}\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{kP}\frac{\partial Q}{\partial v}:$$

$$(11) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = PQ\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{Q^2}{kR\sin\sigma}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial v} = kP^2\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PQ}{R\sin\sigma}.$$

Differentiirt man eine dieser Gleichungen nach u und beachtet, dass

$$N = -\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial u} = -\frac{k}{Q}\frac{\partial P}{\partial u}$$

ist, so findet man

$$(12)\qquad \frac{\partial N}{\partial v} = QN\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PN}{R\sin\sigma}.$$

Aus (10) folgt ferner

$$(13)\qquad \frac{\partial M}{\partial u} = -QN\frac{R\cos\sigma}{kR\sin\sigma} + \frac{PN}{kR\sin\sigma}.$$

Vergleicht man den obigen Werth von $\frac{\partial N}{\partial v}$ mit dem aus (*F.* 9) folgenden, so findet man

$$NQ\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PN}{R\sin\sigma} = \sum\nolimits_h x_h \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - N\sum\nolimits_h y_h \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv};$$

nach der dritten Gleichung (*F.* 9) ist aber wegen $g = P$:

$$\sum\nolimits_h y_h \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv} = \frac{P}{R\sin\sigma} - Q\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} + \frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dR\sin\sigma}{dv},$$

mithin

$$\sum\nolimits_h x_h \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - \frac{N}{R\sin\sigma}\frac{dR\sin\sigma}{dv} = 0$$

oder, wenn man für N seinen Werth aus (*F.* 9) substituirt:

$$\sum\nolimits_h x_h \left[\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{R\sin\sigma}\frac{dX_h^0}{dv}\right) - \frac{1}{(R\sin\sigma)^2}\frac{dR\sin\sigma}{dv}\frac{dX_h^0}{dv}\right] = 0.$$

Nun ist $fx_h = \frac{\partial X_h}{\partial u}$; es müsste also diese Gleichung, falls die Coefficienten von x_1, x_2, x_3 nicht sämmtlich verschwinden, eine andere von der Form

$$X_1 W_1(v) + X_2 W_2(v) + X_3 W_3(v) = W(v)$$

zur Folge haben, welche besagen würde, dass die Krümmungslinien $v = Const.$ nicht blos sphärisch sondern auch eben, also Kreise sind.

Diesen Fall, der auf Rotationsflächen führt, schliessen wir von der Betrachtung aus. Dann haben wir den Coefficienten von x_h gleich Null zu setzen und finden durch Integration:

$$\frac{dX_h^0}{dv} = c_h(R\sin\sigma)^2 \qquad (h=1,2,3)$$

worin c_1, c_2, c_3 drei beliebige Constanten sind. Aus dieser Relation geht hervor, dass die Mittelpunkte (X_1^0, X_2^0, X_3^0) der osculatorischen Kugelflächen auf einer Geraden liegen. Verlegt man in diese die Axe der X_1, so müssen die Constanten c_2 und c_3 verschwinden und man hat, wenn man $X_1^0 = V$ und $c_1 = c$ setzt,

$$\frac{dV}{dv} = c(R\sin\sigma)^2.$$

Da wir nunmehr auf die ersten Formeln zurückzugreifen berechtigt sind, so combiniren wir diese Gleichung mit (4) zu dem System:

$$(14)\qquad \left|\begin{aligned} R\sin\sigma &= \frac{q_1}{c} \\ \frac{dR\cos\sigma}{dv} &= \frac{q_1 q_2}{c} \\ \frac{dV}{dv} &= \frac{q_1^2}{c}. \end{aligned}\right.$$

§ 2.

Aus (6) folgt ein Werth für $\frac{\partial Q}{\partial v}$, welcher mit dem Werthe aus (11) verglichen die Gleichung

$$-q_1'z_1 - q_2' - q_1 Q y_1 = kP^2\frac{R\cos\sigma}{R\sin\sigma} - \frac{PQ}{R\sin\sigma}$$

liefert, in der $\frac{dq_1}{dv}$ und $\frac{dq_2}{dv}$ abgekürzt mit q_1' und q_2' bezeichnet sind. Ersetzt man in ihr z_1 und y_1 durch ihre Werthe aus (6) und (7), so erhält man mit Benutzung der Relation $Q^2 - kP^2 = 1$:

$$(15)\qquad cR\cos\sigma = q_1 q_2' - q_2 q_1',$$

woraus durch Differentiation und Berücksichtigung von (14) die Gleichung folgt:

$$(16)\qquad q_1 q_2'' - q_2 q_1'' = q_1 q_2.$$

Nach ($F.$ 4) ist

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = Nx_1 - Qz_1 = q_1 x_1^2 - z_1(-q_1 z_1 - q_2)$$
$$= q_1 - q_1 y_1^2 + q_2 z_1;$$

andererseits liefert (7)

$$y_1 = \frac{cP}{q_1^2} - Q\frac{cR\cos\sigma}{q_1^2} + \frac{q_1'}{q_1^2}.$$

Hieraus folgt ein zweiter Ausdruck für $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, welcher dem ersten gleichgesetzt folgende Gleichung ergiebt:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'}{q_1^2}\right) = q_1 - \frac{q_1'^2}{q_1^3} - \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{c^2}{kq_1^3} - c^2\frac{(R\cos\sigma)^2}{q_1^3}$$

oder

$$(17)\qquad \frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'}{q_1}\right) = q_1^2 - q_2^2 + \frac{c^2}{kq_1^2} - \frac{c^2(R\cos\sigma)^2}{q_1^2}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{2q_1'}{q_1}$ und addirt rechts

$$\frac{2c^2R\cos\sigma}{q_1^2}\frac{dR\cos\sigma}{dv} - \frac{2q_2(q_1q_2' - q_2q_1')}{q_1} = 0$$

hinzu, so erhält man

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{q_1'^2}{q_1^2}\right) = 2q_1q_1' + \frac{2c^2q_1'}{kq_1^3} + c^2\frac{d}{dv}\left(\frac{(R\cos\sigma)^2}{q_1^2}\right) - 2q_2q_2'$$

und nach der Integration

$$(18)\qquad \frac{q_1'^2}{q_1^2} = q_1^2 - q_2^2 - \frac{c^2}{kq_1^2} + \frac{c^2(R\cos\sigma)^2}{q_1^2} + \alpha,$$

wo α eine beliebige Constante ist.

Durch Addition von (17) und (18) geht eine Gleichung für q_1'' hervor, mittelst welcher man leicht mit Benutzung von (21) die analoge Gleichung für q_2'' aufstellt:

$$(19)\qquad \begin{cases} q_1'' = \alpha q_1 + 2q_1(q_1^2 - q_2^2), \\ q_2'' = (1+\alpha)q_2 + 2q_2(q_1^2 - q_2^2). \end{cases}$$

Ein Integral dieser Differentialgleichungen liefert (18), wenn man $cR\cos\sigma$ durch $(q_1 q_2' - q_2 q_1')$ ersetzt; ein zweites ergiebt die Integration der Gleichung für $2q_1' q_1'' - 2q_2' q_2''$:

$$(20)\quad \begin{cases} q_1'^2 - (q_1 q_2' - q_2 q_1')^2 - \alpha q_1^2 - q_1^4 + q_1^2 q_2^2 = -\dfrac{c^2}{k}, \\ q_1'^2 - q_2'^2 - \alpha q_1^2 + (1 + \alpha) q_2^2 - (q_1^2 - q_2^2)^2 = \beta, \end{cases}$$

wo β die Integrationsconstante ist.

Aus (20) sind q_1 und q_2 in Function von v zu bestimmen; ist dies geschehn, so liefern (14) und (15) ohne weiteres die Werthe von $R\sin\sigma$, $R\cos\sigma$ und $\dfrac{dV}{dv}$; dann sind alle von v abhängigen Quantitäten bis auf die mittelst (1) zu findenden l_h, m_h, n_h berechnet.

§ 3.

Die aus (6) folgenden Gleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} x_1 p_1 = P y_3 - M z_3, \\ x_1 p_2 = -P y_2 + M z_2 \end{cases}$$

differentiire man nach u und setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -(M y_1 + P z_1) = -w;$$

man hat dann

$$(22)\quad \begin{cases} p_1' x_1 - p_1 w = \dfrac{\partial P}{\partial u} y_3 - \dfrac{\partial M}{\partial u} z_3 \\ p_2' x_1 - p_2 w = -\dfrac{\partial P}{\partial u} y_2 + \dfrac{\partial M}{\partial u} z_2. \end{cases}$$

Leitet man hieraus die Determinanten-Gleichung

$$x_1^2 (p_1' p_2 - p_2' p_1) = \left(M \frac{\partial P}{\partial u} - P \frac{\partial M}{\partial u}\right)(z_2 y_3 - z_3 y_2)$$

ab und beachtet, dass nach (13), (10), (6) und (14)

$$M\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{N}{k^2 R \sin\sigma}(Q^2 - kP^2) = \frac{N}{k^2 R \sin\sigma} = \frac{c}{k^2} x_1$$

ist, so gelangt man zu der ersten Gleichung für p_1 und p_2:

(23) $$p_1' p_2 - p_2' p_1 = -\frac{c}{k^2}.$$

Mit Hilfe von (21) und (22) bilden wir ferner folgende Gleichungen:

$$x_1^2(p_1^2 + p_2^2) = (My_1 + Pz_1)^2 + x_1^2(M^2 + P^2)$$
$$= M^2 + P^2 - (Mz_1 - Py_1)^2,$$

$$x_1^2(p_1 p_1' + p_2 p_2') - x_1 w (p_1^2 + p_2^2)$$
$$= (My_1 + Pz_1)\left(\frac{\partial M}{\partial u} y_1 + \frac{\partial P}{\partial u} z_1\right) + x_1^2\left(M\frac{\partial M}{\partial u} + P\frac{\partial P}{\partial u}\right),$$

$$x_1^2(p_1'^2 + p_2'^2) - 2x_1 w(p_1 p_1' + p_2 p_2') + w^2(p_1^2 + p_2^2)$$
$$= \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right)^2.$$

Wenn man in der letzten derselben $(p_1 p_1' + p_2 p_2')$ durch seinen Werth aus der zweiten und dann $w^2 = (My_1 + Pz_1)^2$ durch seinen Werth aus der ersten ersetzt, so erhält man:

$$x_1^3(p_1'^2 + p_2'^2) - x_1^3(p_1^2 + p_2^2)^2$$
$$- x_1^3(p_1^2 + p_2^2)(M^2 + P^2) + x_1\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + x_1\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - x_1\left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right)^2$$
$$+ 2x_1^2(p_1^2 + p_2^2)\left(\frac{\partial M}{\partial u} y_1 + \frac{\partial P}{\partial u} z_1\right) - 2x_1^2(M^2 + P^2)\left(\frac{\partial M}{\partial u} y_1 + \frac{\partial P}{\partial u} z_1\right)$$
$$+ 2x_1^2(My_1 + Pz_1)\left(M\frac{\partial M}{\partial u} + P\frac{\partial P}{\partial u}\right).$$

Nun füge man rechts

$$\frac{q_1 x_1^3}{k}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{q_1 x_1^3}{k}(M^2 + P^2) + \frac{q_1^2 x_1^3}{k}(Mz_1 - Py_1)^2 = 0$$

hinzu, bringe die Glieder mit $(p_1^2 + p_2^2)$ auf die rechte Seite und dividire die ganze Gleichung durch x_1^3; dann erscheint sie nach einer einfachen Umformung in folgender Gestalt:

$$p_1'^2 + p_2'^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2 + A(p_1^2 + p_2^2) = B, \tag{24}$$

wo

$$A = M^2 + P^2 - \frac{2}{x_1}\left(\frac{\partial M}{\partial u} y_1 + \frac{\partial P}{\partial u} z_1\right) - \frac{q_1^2}{k}(1 - y_1^2 - z_1^2),$$

$$B = \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right)^2$$

$$-\frac{2}{x_1}\left(P\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial P}{\partial u}\right)(Py_1 - Mz_1) - \frac{q_1^2}{k}(M^2 + P^2) + \frac{q_1^2}{k}(Mz_1 - Py_1)^2.$$

Nun sind nach (10), (7) und (6) die Grössen M, y_1 und z_1 ganze lineare Functionen von P und Q mit Coefficienten, die nur von v abhängen; ein gleiches gilt von

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{q_1}{N}\frac{\partial M}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_1}\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{q_1}{N}\frac{\partial P}{\partial u}$$

und, wie sich leicht zeigen lässt, von

$$(Mz_1 - Py_1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial M}{\partial u} z_1 - \frac{\partial P}{\partial u} y_1\right).$$

Erinnert man sich noch, dass oben die Determinante

$$M\frac{\partial P}{\partial u} - P\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{c}{k^2} x_1$$

befunden wurde, so ist leicht zu übersehn, dass A und B als ganze Functionen zweiten Grades von P und Q darstellbar sind. Es zeigt sich aber, dass von den Gliedern mit P und Q nur die quadratischen übrigbleiben, und dass auch diese verschwinden, wenn man die Relation $Q^2 - kP^2 = 1$ hinzuzieht. A und B sind also gewissen nur von v abhängigen Ausdrücken gleich. Diese reduciren sich aber, wenn man

die Integrale (20) hinzuzieht, auf blosse Constanten, so dass schliesslich für A und B folgende Werthe hervorgehn:

$$A = \frac{\alpha - 1}{k}$$

$$B = \frac{\beta - \alpha}{k^2}.$$

In (23) und (24) haben wir nun die gesuchten Differentialgleichungen für p_1 und p_2:

$$(25) \quad \begin{cases} p_1' p_2 - p_2' p_1 = -\dfrac{c}{k^2}, \\[2ex] p_1'^2 + p_2'^2 - (p_1^2 + p_2^2)^2 + \dfrac{\alpha - 1}{k}(p_1^2 + p_2^2) = \dfrac{\beta - \alpha}{k^2}. \end{cases}$$

Sie sind die Integrale der Gleichungen zweiter Ordnung:

$$(26) \quad \begin{cases} p_1'' = \dfrac{1 - \alpha}{k} p_1 + 2p_1(p_1^2 + p_2^2), \\[2ex] p_2'' = \dfrac{1 - \alpha}{k} p_2 + 2p_2(p_1^2 + p_2^2), \end{cases}$$

welche von wesentlich derselben Form sind, wie die des Systems (19), denen q_1 und q_2 zu genügen haben. Indessen ist es eine für die Integration vortheilhafte Vereinfachung, dass die Coefficienten von p_1 und p_2 einander gleich sind. Wir beginnen daher mit der Integration der Gleichungen (25) und lassen dann die des Systems (20) folgen.

§ 4.

Es ist

$$(p_1' p_1 + p_2' p_2)^2 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1'^2 + p_2'^2) - (p_1' p_2 - p_2' p_1)^2,$$

mithin nach (25)

$$(p_1' p_1 + p_2' p_2)^2 = (p_1^2 + p_2^2)^3 - \frac{\alpha - 1}{k}(p_1^2 + p_2^2)^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{c^2}{k^4},$$

oder, wenn

$$p_1^2 + p_2^2 = p$$

gesetzt wird,

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{du}\right)^2 &= p^3 - \frac{\alpha - 1}{k}p^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2}p - \frac{c^2}{k^4}, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{du}\right)^2 &= (p - s_1)(p - s_2)(p - s_3), \end{aligned} \right.$$

wenn man mit s_1, s_2, s_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$p^3 - \frac{\alpha - 1}{k}p^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2}p - \frac{c^2}{k^4} = 0$$

bezeichnet.

Mittelst ϑ-Functionen einer Variabeln lässt sich also p als Function von u darstellen.

Es seien die vier Functionen $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$ und $\vartheta_{11}(u)$ durch die Reihenentwicklungen

$$\vartheta_{gh}(u) = \sum_{-\infty, +\infty}^{m} e^{\omega\left(m+\frac{g}{2}\right)^2 + 2\left(m+\frac{g}{2}\right)\left(u+\frac{\pi i h}{2}\right)} \qquad (g, h = 0, 1)$$

definirt und mit ϑ_{00}, ϑ_{01}, ϑ_{10} die Werthe von $\vartheta_{00}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{10}(u)$ für das Argument Null bezeichnet.

Dann setze ich

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} p - s_1 &= s\frac{\vartheta_{00}^2(u_1)}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(u_1)}, \\ p - s_2 &= s\frac{\vartheta_{01}^2(u_1)}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(u_1)}, \\ p - s_3 &= s\frac{\vartheta_{10}^2(u_1)}{\vartheta_{10}^2\vartheta_{11}^2(u_1)} \end{aligned} \right.$$

und gelange durch Anwendung der Formeln

$$\vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{01}^2\vartheta_{00}^2(u) = \vartheta_{10}^2\vartheta_{11}^2(u),$$

$$\vartheta_{10}^2\vartheta_{00}^2(u) - \vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2(u) = \vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(u),$$

$$\vartheta_{10}^2\vartheta_{01}^2(u) - \vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2(u) = \vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(u)$$

zu den Gleichungen:

$$s_1 - s_2 = s\,\frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2},$$

$$s_3 - s_1 = s\,\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2},$$

$$s_3 - s_2 = s\,\frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2},$$

die zur Bestimmung des Moduls ω und der neu eingeführten Constanten s dienen können. Man kann sie jedoch durch die nachstehenden Gleichungen

$$(29)\qquad \left|\begin{aligned} s_1 &= -s\,\frac{\vartheta_{00}^2(a)}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(a)},\\ s_2 &= -s\,\frac{\vartheta_{01}^2(a)}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(a)},\\ s_3 &= -s\,\frac{\vartheta_{10}^2(a)}{\vartheta_{01}^2\vartheta_{11}^2(a)}\end{aligned}\right.$$

ersetzen, wenn man eine weitere Constante a benutzt, die durch eine dieser Gleichungen definirt ist.

Aus (28) folgt

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{du_1} = -\frac{s\vartheta'_{11}}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}\,\frac{\vartheta_{00}(u_1)\vartheta_{10}(u_1)\vartheta_{01}(u_1)}{\vartheta_{11}^3(u_1)},$$

woraus in Verbindung mit (27) und (28) der Zusammenhang zwischen u_1 und u hervorgeht:

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \frac{s}{\vartheta'^2_{11}}$$

$$(30)\qquad \frac{du_1}{du} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}}.$$

Unter $\sqrt{s}$ ist eine beliebige der beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 = s$ verstanden.

Ersetzt man in der ersten Gleichung von (28) s_1 durch seinen Werth aus (29), so erhält man

$$p = \frac{s}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}\left[\vartheta_{00}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a) - \vartheta_{00}^2(a)\vartheta_{11}^2(u_1)\right],$$

das ist

(31) $$p = -s\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)}{\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}.$$

Nun giebt (23)

$$p_1'p_2 - p_2'p_1 = -\frac{c}{k^2},$$

folglich

$$\frac{p_1'p_2 - p_2'p_1}{p_1^2 + p_2^2} = -\frac{c}{k^2 p}$$

und

$$\frac{d}{du}\left(\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{c\vartheta_{11}^2(u_1)\vartheta_{11}^2(a)}{k^2 s\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)}.$$

Es ist aber

$$\vartheta_{11}'(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a) - \vartheta_{11}'(u_1-a)\vartheta_{11}(u_1+a) = A\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a) + B\vartheta_{11}^2(u_1),$$

$$A = \frac{2\vartheta_{11}'(a)}{\vartheta_{11}(a)}, \qquad B = -\frac{\vartheta_{11}'\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}^2(a)};$$

also

$$B\frac{\vartheta_{11}^2(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1+a)\vartheta_{11}(u_1-a)} = \frac{d}{du_1}\left[\log\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}\right] - A,$$

und mithin

$$\frac{d}{du_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{du}{du_1}\frac{c\vartheta_{11}^2(a)}{k^2 sB}\left\{\frac{d}{du}\left[\log\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}\right] - A\right\}.$$

Aus der cubischen Gleichung, deren Wurzeln s_1, s_2, s_3 sind, folgt die Relation

$$\frac{c^2}{k^4} = s_1 s_2 s_3 = -\frac{s^3\vartheta_{00}^2(a)\vartheta_{01}^2(a)\vartheta_{10}^2(a)}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2\vartheta_{11}^6(a)},$$

$$\frac{c}{k^2} = \frac{\sqrt{-1}\, s\sqrt{s}\,\vartheta_{00}(a)\vartheta_{01}(a)\vartheta_{10}(a)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}\vartheta_{11}^3(a)},$$

welche unter Zuhilfenahme von (30) den Werth des Factors vor der Klammer zu berechnen gestattet. Versteht man unter $\sqrt{s}$ nach (30) $\vartheta_{11}'\frac{du_1}{du}$, so ist die Wurzel $\sqrt{-1}$ eindeutig bestimmt durch die eindeutigen Werthe der übrigen in der Gleichung vorkommenden Grössen und soll

fortan mit i bezeichnet werden. Der Factor vor der Klammer bestimmt sich zu $-\frac{i}{2}$, wenn man beachtet, dass

$$\vartheta_{11}(2a) = \frac{2\vartheta_{00}(a)\vartheta_{01}(a)\vartheta_{10}(a)\vartheta_{11}(a)}{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}$$

ist.

Führt man noch eine neue Variable u_2 durch die Gleichung

(32)
$$du_2 = -\frac{A}{2}du_1$$
$$du_2 = -\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}du_1$$

ein, so lautet das Integral der obenstehenden Gleichung:

$$\operatorname{arctg}\frac{p_1}{p_2} = -iu_2 - i\log\sqrt{\frac{\vartheta_{11}(u_1+a)}{\vartheta_{11}(u_1-a)}},$$

$$i\frac{p_1}{p_2} = \frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) - e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) + e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}.$$

Zur Berechnung von p_1 und p_2 haben wir noch den Werth von $p = p_1^2 + p_2^2$ aus (31) heranzuziehn. Wir ersetzen zuvor in demselben s durch $\left(\frac{du_1}{du}\vartheta'_{11}\right)^2$ und finden, indem wir über das Vorzeichen von p_1 beliebig verfügen:

(33)
$$\left|\begin{aligned} p_1 &= \vartheta'_{11}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) - e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)} \\ p_2 &= i\vartheta'_{11}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a) + e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus geht hervor, dass p_1 und p_2 als Functionen von u_1 und u_2 betrachtet dreifach periodisch sind.

§ 5.

Zur Bestimmung der Grössen q_1 und q_2 hat man auf die Gleichungen (20) zurückzugehn. Transformirt man dieselben durch die Substitution:

$$(34) \qquad \begin{cases} q_1^2 = \xi_1 \xi_2, \\ q_2^2 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \end{cases}$$

so findet man:

$$\frac{\xi_1'^2 \xi_2 (\xi_2 - \xi_1)}{4\xi_1(1 - \xi_1)} + \frac{\xi_2'^2 \xi_1 (\xi_1 - \xi_2)}{4\xi_2(1 - \xi_2)} = -\frac{c^2}{k} + \xi_1\xi_2(\alpha - 1) + \xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2\xi_1.$$

$$\frac{\xi_1'^2(\xi_2 - \xi_1)}{4\xi_1(1 - \xi_1)} + \frac{\xi_2'^2(\xi_1 - \xi_2)}{4\xi_2(1 - \xi_2)} = \beta - \alpha + (\xi_1 + \xi_2)(\alpha_1 - 1) + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1\xi_2$$

und daraus:

$$\frac{\xi_1'^2(\xi_2 - \xi_1)^2}{4\xi_1(1 - \xi_1)} = -\frac{c^2}{k} - (\beta - \alpha)\xi_1 - (\alpha - 1)\xi_1^2 - \xi_1^3,$$

$$\frac{\xi_2'^2(\xi_1 - \xi_2)^2}{4\xi_2(1 - \xi_2)} = -\frac{c^2}{k} - (\beta - \alpha)\xi_2 - (\alpha - 1)\xi_2^2 - \xi_2^3.$$

Hält man mit der cubischen Gleichung

$$p^3 - \frac{\alpha - 1}{k} p^2 + \frac{\beta - \alpha}{k^2} p - \frac{c^2}{k^4} = 0,$$

deren Wurzeln mit s_1, s_2, s_3 bezeichnet wurden, die Gleichung

$$\xi^3 + (\alpha - 1)\xi^2 + (\beta - \alpha)\xi + \frac{c^2}{k} = 0$$

zusammen, so erkennt man dass ihre Wurzeln

$$-ks_1, \qquad -ks_2, \qquad -ks_3$$

sind. Mithin kann man, wenn zur Abkürzung

$$\xi(1 - \xi)(-ks_1 - \xi)(-ks_2 - \xi)(-ks_3 - \xi) = R(\xi)$$

gesetzt wird, den Gleichungen für ξ_1' und ξ_2' auch die Form geben

$$\frac{1}{2}\xi_1'(\xi_1 - \xi_2) = \sqrt{R(\xi_1)}, \qquad \frac{1}{2}\xi_2'(\xi_2 - \xi_1) = \sqrt{R(\xi_2)}.$$

Aus diesen folgen die weiteren:

(35) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\xi_1 d\xi_1}{2\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{\xi_2 d\xi_2}{2\sqrt{R(\xi_2)}} &= dr \\ \frac{d\xi_1}{2\sqrt{R(\xi_1)}} + \frac{d\xi_2}{2\sqrt{R(\xi_2)}} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Das Problem führt also auf hyperelliptische Integrale erster Gattung und macht die Einführung von ϑ-Functionen zweier Variabeln nothwendig.

§ 6.

Ich gebe nun die bei der Umkehrung der Integrale in Anwendung kommenden Formeln und zwar unter Zugrundelegung von KRAZER's *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen*, (Leipzig, Teubner 1882), und mit Benutzung seiner Terminologie.

Der dort auf Seite 49 gegebenen Darstellung der 15 ϑ-Quotienten durch zwei unabhängige Veränderliche x_1 und x_2 entnehme ich die beiden ersten Gleichungen:

(a) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\vartheta(w_1)(v)}{\vartheta(w_3)(v)} &= \frac{[124][125][126]}{[234][235][236]}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \\ \frac{\vartheta(w_2)(v)}{\vartheta(w_3)(v)} &= \frac{[124][125][126]}{[134][135][136]}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-x_2}. \end{aligned}\right.$$

Differentiirt man dieselben vollständig, stellt die links auftretenden Determinanten-Ausdrücke, — als Θ-Functionen zweiter Ordnung aufgefasst, — durch ϑ-Producte linear dar und substituirt für die ϑ-Functionen wiederum ihre Ausdrücke in x_1, x_2, so erhält man

(b) $$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{2r_1} + \frac{dx_2}{2r_2} &= (-1)^{(w_1w_2)(w_3)'}\sqrt{(-1)^{(w_1w_2)(w_1w_3)'}}\,\frac{[234][235][236]}{[134][135][136]}\,\frac{dc_3}{[123]}, \\ \frac{x_1 dx_1}{2r_1} + \frac{x_2 dx_2}{2r_2} &= (-1)^{(w_1w_2w_3)(w_1)'}\sqrt{(-1)^{(w_1w_2)(w_1w_3)'}}\,\frac{[234]^2[235]^2[236]^2}{[124][125][126][134][135][136]}\,\frac{dc_1}{[123]}, \end{aligned}\right.$$

worin:

(c)
$$\left|\begin{aligned}
r_1 &= (-1)^{(w_1 w_2)(w_1 w_3)'}\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_1}\sqrt{1-p^2x_1}\sqrt{1-q^2x_1}\sqrt{1-r^2x_1}\,,\\
r_2 &= \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-p^2x_2}\sqrt{1-q^2x_2}\sqrt{1-r^2x_2}\,;\\
p^2 &= (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_4)'}\frac{[125]^2[126]^2}{[235]^2[236]^2}, \quad q^2 = (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_5)'}\frac{[126]^2[124]^2}{[236]^2[234]^2},\\
r^2 &= (-1)^{(w_1w_3)(w_2w_6)'}\frac{[124]^2[125]^2}{[234]^2[235]^2};\\
dc_i &= dv_1\left(\frac{\partial\vartheta(w_i)(v)}{\partial v_1}\right)_{(v)=(0)} + dv_2\left(\frac{\partial\vartheta(w_i)(v)}{\partial v_2}\right)_{(v)=(0)};\\
[\lambda\mu\nu] &= \vartheta(w_\lambda w_\mu w_\nu)(0).
\end{aligned}\right.$$

Das Symbol $(\varepsilon)(\eta)'$, bezogen auf zwei beliebige Charakteristiken

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2\\ \varepsilon_1', & \varepsilon_2'\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\eta) = \begin{pmatrix}\eta_1, & \eta_2\\ \eta_1', & \eta_2'\end{pmatrix},$$

bedeutet die Summe $\varepsilon_1\eta_1' + \varepsilon_2\eta_2'$.

Diesen Formeln liegt keine Festsetzung über die Reihenfolge der ungraden Charakteristiken $w_1, \ldots, w_6$ zu Grunde; ich bestimme nun, dass unter w_1, w_2, w_3 drei Charakteristiken zu verstehn seien, die (0) zur Summe haben, und unter w_4, w_5, w_6 die drei andern Charakteristiken, welche gleichfalls summirt (0) ergeben. Ferner schreibe ich in (a), (b) und (c) ξ_1, ξ_2 an Stelle von x_1, x_2, vertausche die Charakteristiken w_1, w_2, w_3 mit resp. w_4, w_5, w_6 und vermehre die Argumente um das halbe Periodensystem $\left(\frac{1}{2}kw_6\right)$, unter $(k) = \begin{pmatrix}k_1, & k_2\\ k_1', & k_2'\end{pmatrix}$ eine beliebige Charakteristik verstehend. Vergleicht man dann die entstandenen Formeln mit (34) und (35) und beachtet, dass die Vorzeichen von q_1 und q_2 sowohl als von den Wurzeln $\sqrt{R(\xi_1)}$ und $\sqrt{R(\xi_2)}$ noch willkürlich sind, so erhält man unter Benutzung der Zeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ für ± 1:

(36)
$$\left|\begin{aligned}
ks_1 &= (-1)^{(w_5)(w_1)'}\frac{c_{42}^2 c_{43}^2}{c_{62}^2 c^2}\,,\\
ks_2 &= (-1)^{(w_5)(w_2)'}\frac{c_{43}^2 c_{41}^2}{c_{63}^2 c_{61}^2}\,,\\
ks_3 &= (-1)^{(w_5)(w_3)'}\frac{c_{41}^2 c_{42}^2}{c_{61}^2 c^2}\,;
\end{aligned}\right.$$

$$(37)\quad \begin{cases} q_1 = \varepsilon_1 e^{-\frac{\pi i}{2}(kw_6)(w_5)'} \dfrac{C_4 \vartheta(kw_5)(v)}{C_6 \vartheta(k)(v)}, \\[2ex] q_2 = \varepsilon_2 e^{-\frac{\pi i}{2}(kw_6)(w_4)'} \dfrac{C_5 \vartheta(kw_4)(v)}{C_6 \vartheta(k)(v)}: \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} dc_6 = D_1 c_6 \,.\, dv_1 + D_2 c_6 \,.\, dv_2 = 0, \\ dc_4 = D_1 c_4 \,.\, dv_1 + D_2 c_4 \,.\, dv_2 = C dv, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung:

$$(39)\quad \begin{cases} \vartheta(w_i w_k)(0) = c_{ik}, \qquad \vartheta(0)(0) = c_0; \\ c_{41} c_{42} c_{43} = C_4, \qquad c_{51} c_{52} c_{53} = C_5, \qquad c_{61} c_{62} c_{63} = C_6; \\ \left(\dfrac{\partial \vartheta(w_i)(v)}{\partial v_1}\right)_{(v)=(0)} = D_1 c_i, \qquad \left(\dfrac{\partial \vartheta(w_i)(v)}{\partial v_2}\right)_{(v)=(0)} = D_2 c_i; \\ C = \varepsilon_3 \sqrt{-\dfrac{c^2}{k}} \cdot \dfrac{c_0 C_5 C_6}{C_4^2} e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_5)'} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Dem Ausdruck für C kann man auch die einfachere Form

$$(40)\qquad C = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 C_5}{C_6}$$

geben, weil

$$\frac{c^2}{k} = k^3 s_1 s_2 s_3 = \frac{C_4^4}{C_6^4}$$

und $e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_6)'} = \sqrt{-1}$ ist.

Aus (38) folgt

$$(41)\quad \begin{cases} dv_1 = \Delta \,.\, D_2 c_6 \,.\, dv, \\ dv_2 = -\Delta \,.\, D_1 c_6 \,.\, dv \end{cases}$$

und

$$\Delta [D_1 c_4 \,.\, D_2 c_6 - D_1 c_6 \,.\, D_2 c_4] = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 C_5}{C_6} \,.$$

Die Determinante links ist aber bis auf das Zeichen gleich [1]

$$c_0 c_{51} c_{52} c_{53} = c_0 C_5,$$

[1] Vgl. Weber, *Anwendung der Thetafunctionen etc.*, Mathematische Annalen, Bd. 14, p. 182, Gleichungssystem (9).

folglich nach entsprechender Verfügung über ε_3:

(42) $$\Delta = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)}}{C_6}.$$

Setzt man ferner $\varepsilon_1 = \varepsilon_3(-1)^{(w_5)(w_6)'}$ und $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$, so kann man mit Rücksicht auf die Gleichungen

(42') $$\frac{dc_4}{dv} = c_4' = \varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} \frac{c_0 C_5}{C_6}, \quad \frac{dc_5}{dv} = c_5' = -\varepsilon_3 e^{\frac{\pi i}{2}(w_6)(w_4)'} (-1)^{(w_6)(e)'} \frac{c_0 C_4}{C_6},$$

$$\frac{dc_6}{dv} = c_6' \quad 0$$

für q_1 und q_2 folgende Ausdrücke aufstellen:

(43) $$\left| \begin{aligned} q_1 &= i_1 \frac{c_5' \vartheta(kw_5)(v)}{c_0 \vartheta(k)(v)}, \\ q_2 &= i_2 \frac{c_4' \vartheta(kw_4)(v)}{c_0 \vartheta(k)(v)}, \end{aligned} \right.$$

in denen

(43') $$\left| \begin{aligned} i_1 &= -ie^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5)'}(-1)^{(w_5)(w_6)'}, \\ i_2 &= -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'}(-1)^{(w_4)(w_5)} \end{aligned} \right.$$

ist. Von den in (42') angeführten Werthen für c_4', c_6' und c_5' ergeben sich die beiden ersten unmittelbar aus (38) und (40); der letzte folgt aus der Gleichung

$$0 = (-1)^{(w_4)(e)'} C_4 dc_4 + (-1)^{(w_5)(e)'} C_5 dc_5 + (-1)^{(w_6)(e)'} C_6 dc_6$$

in welcher unter (e) die gerade Charakteristik $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ verstanden ist, und die aus der Krazer'schen Formel (C_4), (a. a. O., p. 39) hervorgeht, wenn man dieselbe unter Vertauschung der Indices 1, 2, 3 mit resp. 4, 5, 6 differentiirt und darauf $(\mu) = (0)$ und $(v) = (0)$ setzt.

Vertauscht man in jener Krazer'schen Formel nur die Indices 2, 3 mit resp. 4, 6, so erhält man in gleicher Weise die Gleichung

$$0 = c_0 c_{25} c_{35} dc_1 + (-1)^{(w_1 w_4)(e w_1 w_5)'} c_{14} c_{26} c_{36} dc_4 + (-1)^{(w_1 w_6)(e w_1 w_5)'} c_{16} c_{24} c_{34} dc_6,$$

aus welcher wegen $dc_6 = 0$

$$c_1' = -(-1)^{(w_1 w_4)(e w_1 w_5)'} \frac{c_{14} c_{26} c_{36}}{\text{[illegible]}} c_4'$$

folgt und mit Rücksicht auf (42) die bald zur Verwendung gelangende Relation

(44) $$c_1' c_4' = -(-1)^{(w_1 w_4)(e w_1 w_5)' + (w_6)(w_4)'} \frac{c_0 c_{11} c_{15}^2 c_{25} c_{35}}{c_{16}^2 c_{23} c_{36}}.$$

§ 7.

Wir gehn zur Bestimmung von $R \cos \sigma$ und V über. Nach (15) war

$$cR \cos \sigma = q_1 q_2' - q_2 q_1',$$

also

$$cR \cos \sigma = \frac{i_1 i_2 c_4 c_5}{c_0^2 \vartheta^2(k)(v)} [\vartheta(kw_5)(v) . \vartheta'(kw_4)(v) - \vartheta(kw_4)(v) . \vartheta'(kw_5)(v)];$$

für die Determinante kann man die Summe

$$A\vartheta(k)(v) . \vartheta(kw_6)(v) + B\vartheta(kw_1)(v) \vartheta(kw_1 w_6)(v)$$

setzen und in der üblichen Weise die unbestimmten Coefficienten A und B berechnen. Man findet

$$A = -(-1)^{(kw_1)(e)' + (kw_1 w_5)(w_6)'} \frac{c_1 c_{16}}{c_{14} c_{15}}$$

und für B ein Product, das c_6' zum Factor hat und deshalb $= 0$ ist. Demnach

$$cR \cos \sigma = -i_1 i_2 (-1)^{(kw_1)(e)' + (kw_1 w_5)(w_6)'} \frac{c_1' c_4' c_5' c_{16}}{c_{14} c_{15} c_0^2} \frac{\vartheta(kw_6)(v)}{\vartheta(k)(v)},$$

was mit Benutzung von (44) und (42) einen einfachern Ausdruck für $cR \cos \sigma$ liefert, den wir mit demjenigen für $cR \sin \sigma = q_1$ zusammenstellen:

(45) $$\left| \begin{array}{l} cR \cos \sigma = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'} (-1)^{(kw_4)(e)' + (k)(w_6)'} \dfrac{C_5}{C_6} \dfrac{i_1 c_5'}{c_0} \dfrac{\vartheta(kw_6)(v)}{\vartheta(k)(v)}, \\ cR \sin \sigma = \dfrac{i_1 c_5'}{c_0} \dfrac{\vartheta(kw_5)(v)}{\vartheta(k)(v)}. \end{array} \right.$$

Bei der Bestimmung von V gehn wir von der Gleichung (14) aus:

$$c\frac{dV}{dv} = q_1^2$$

(46)
$$c\frac{dV}{dv} = -(-1)^{(k)(w_5)'}\frac{c_5'^2}{c_0^2}\cdot\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}.$$

V ist einem Integral zweiter Gattung gleich; es muss sich demnach durch die partiellen Ableitungen des Logarithmus einer ϑ-Function darstellen lassen. Mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten leitet man folgende Formeln ab:

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1^2} = c_0D_{11}c_0 + \sum^i(-1)^{(k)(w_i)'}(D_1c_i)^2\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1\partial v_2} = c_0D_{12}c_0 + \sum^i(-1)^{(k)(w_i)'}D_1c_i.D_2c_i\cdot\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$c_0^2\frac{\partial^2\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2^2} = c_0D_{22}c_0 + \sum^i(-1)^{(k)(w_i)'}(D_2c_i)^2\frac{\vartheta^2(kw_i)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

$$(i = 4,\ 5,\ 6)$$

in welchen

$$D_{ik}c_0 = \left[\frac{\partial^2\vartheta(0)(v)}{\partial v_i\partial v_k}\right]_{(v)=(0)}.$$

ist.

Da

$$dv_1 = \Delta.D_2c_6.dv \quad \text{und} \quad dv_2 = -\Delta.D_1c_6.dv$$

ist, so folgt aus diesen, wenn man abgekürzt

$$D_1c_i.D_2c_k - D_1c_k.D_2c_i = [ik] = -[ki]$$

setzt:

$$\frac{c_0^2}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}\right] = c_0[D_{11}c_0.D_2c_6 - D_{12}c_0.D_1c_6] + (-1)^{(k)(w_4)'}D_1c_4[46]\frac{\vartheta^2(kw_4)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}$$
$$+ (-1)^{(k)(w_5)'}D_1c_5[56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}.$$

$$\frac{c_0^2}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right] = c_0[D_{12}c_0.D_2c_6 - D_{22}c_0.D_1c_6] + (-1)^{(k)(w_4)'}D_2c_4[46]\frac{\vartheta^2(kw_4)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}$$
$$+ (-1)^{(k)(w_5)'}D_2c_5[56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)},$$

und hieraus durch Elimination von $\vartheta^2(kw_4)(v)$:

$$\frac{c'}{\Delta}\frac{d}{dv}\left[D_2c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}-D_1c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right]$$

$$=c_0\left[D_2c_4\{D_{11}c_0.D_2c_6-D_{12}c_0.D_1c_6\}-D_1c_4\{D_{12}c_0.D_2c_6-D_{22}c_0.D_1c_6\}\right]$$

$$+(-1)^{(k)(w_5)'}[54][56]\frac{\vartheta^2(kw_5)(v)}{\vartheta^2(k)(v)}.$$

Den aus dieser Gleichung folgenden Werth des letzten ϑ-Quotienten substituiren wir in (46) und finden nach der Integration V bis auf eine additive Constante bestimmt:

$$(47)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{[54][56]c_0c}{c'^2}V\\&=v\left[D_{11}c_0.D_2c_4.D_2c_6-D_{12}c_0.(D_2c_4.D_1c_6-D_1c_4.D_2c_6)+D_{22}c_0.D_1c_4.D_1c_6\right]\\&\quad-\frac{c_0}{\Delta}\left|D_2c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_1}-D_1c_4\frac{\partial\log\vartheta(k)(v)}{\partial v_2}\right|.\end{aligned}\right.$$

§ 8.

Die vollständige Integration der Differentialgleichungen (1) wird, wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, bewirkt durch 9 ϑ-Quotienten, die den Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution genügen.

Auf die übersichtliche Darstellung der Quotienten der geraden ϑ-Functionen als Coefficienten einer rechtwinkligen Coordinatentransformation hat zuerst Herr Weber hingewiesen. Von seinen Ausdrücken (a. a. O., p. 181 (6)) ausgehend gelangt man, wenn man die besondern Annahmen über die Charakteristiken fallen lässt, durch Vermehrung der Argumente um das System halber, der Charakteristik (k) entsprechender Perioden zu dem System:

$$(48)\quad\left|\begin{aligned} l_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4 w_h)'}(-1)^{(w_4)(w_h)'}\frac{c_{4h}\vartheta(kw_4w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \\ m_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5 w_h)'}(-1)^{(w_5)(w_h)'}\frac{c_{5h}\vartheta(kw_5w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \\ n_h &= e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_6 w_h)'}(-1)^{(w_6)(w_h)'}\frac{c_{6h}\vartheta(kw_6w_h)(v)}{c_0\vartheta(k)(v)}, \end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

dessen orthogonalen Charakter man nachträglich am leichtesten mittelst der KRAZER'schen Formeln (B_4) und (C_4), (a. a. O., p. 35 und 39) verificirt. Der Nachweis, dass dasselbe die Gleichungen (1) befriedigt, rechtfertigt die Änderung, die an den WEBER'schen Ausdrücken vorgenommen wurde.[1]

---

[1] *Anmerkung.* Es sei mir an dieser Stelle die Notiz gestattet, dass die KRAZER-schen Formeln (B_2) und (C_2), (p. 35 und 37), an Inhalt und Umfang zu folgendem Theorem zusammengefasst werden können:

Bedeuten (ε) und (η) zwei beliebige Charakteristiken, w_0 die Charakteristik (0), u_1, u_2 und v_1, v_2 zwei Paare veränderlicher Argumente und wird

$$(-1)^{(w_\alpha)(w_\beta)'}e^{-\frac{\pi i}{2}(\varepsilon\eta)(w_\alpha w_\beta)'}\vartheta(\varepsilon w_\alpha w_\beta)(u)\,.\,\vartheta(\eta w_\alpha w_\beta)(v) = \Theta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3\\ \beta = 0,\ 4,\ 5,\ 6\end{pmatrix}$$

gesetzt, so bilden die 16 ϑ-Producte

$$\begin{matrix}\Theta_{00} & \Theta_{04} & \Theta_{05} & \Theta_{06}\\ \Theta_{10} & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16}\\ \Theta_{20} & \Theta_{24} & \Theta_{25} & \Theta_{26}\\ \Theta_{30} & \Theta_{34} & \Theta_{35} & \Theta_{36},\end{matrix}$$

einzeln dividirt durch einen gemeinsamen Nenner, die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth

$$(-1)^{[illegible]}$$

hat.

Dieses Theorem ist zuerst von Herrn F. CASPARY aufgestellt worden, aber nur für besondere Werthe von (ε) und (η) (CRELLE's Journal, Bd. 94, p. 77).

Durch Differentiation erhält man

$$(48') \quad \left| \begin{aligned} \frac{dl_h}{dv} &= L'n_h - L''m_h, \\ \frac{dm_h}{dv} &= L''l_h - Ln_h, \\ \frac{dn_h}{dv} &= Lm_h - L'l_h; \end{aligned} \right. \qquad (h=1,2,3)$$

$$L = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_4)'} (-1)^{(w_4)(w_5)'} \frac{c'_4 \vartheta(kw_4)(v)}{c_0 \vartheta(k)(v)},$$

$$L' = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_5)'} (-1)^{(w_5)(w_6)'} \frac{c'_5 \vartheta(kw_5)(v)}{c_0 \vartheta(k)(v)},$$

$$L'' = e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_6)'} (-1)^{(w_6)(w_4)'} \frac{c'_6 \vartheta(kw_6)(v)}{c_0 \vartheta(k)(v)}.$$

Nun ist wegen $c'_6 = 0$ auch $L'' = 0$ und dann, wie ein Vergleich mit (43) lehrt, $L = -q_2$ und $L' = iq_1$, mithin in der That (48′) identisch mit (1). In (48) hat man zwar nur ein particulares System von Integralgleichungen; man darf aber, wie in § 1 gezeigt wurde, ein solches wählen, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun.

Was ferner die Integration der Gleichungen (2) anbelangt, so führt der Umstand, dass man die dreifach periodischen Functionen p_1 und p_2 als Grenzfälle von vierfach periodischen ansehn kann, auf die Vermuthung, dass man durch einen Grenzübergang, der die vierfach periodischen Quotienten von (48) in dreifach periodische verwandelt, die Integralgleichungen von (2) wird gewinnen können. Man hat indessen nicht mit (48) selbst eine derartige Umformung vorzunehmen sondern mit einem abgeleiteten Systeme und zwar mit folgendem:

$$\begin{array}{ccc} \pm\frac{1}{l_1}, & \frac{il_2}{l_1}, & \frac{il_3}{l_1}, \\ \frac{im_1}{l_1}, & \frac{n_3}{l_1}, & -\frac{n_2}{l_1}, \\ \frac{in_1}{l_1}, & -\frac{m_3}{l_1}, & \frac{m_2}{l_1}. \end{array}$$

Auf die ausführliche Darstellung des Grenzübergangs verzichte ich; sie ist sehr umständlich und überdies von keinem Interesse, da das Endresultat mit Hilfe bekannter Formeln aus der Theorie der elliptischen ϑ-Functionen leicht zu verificiren ist. Ich erwähne nur, dass man die Moduln a_{12}, a_{22} und die Variable v_2 in bestimmter Weise in Null überzuführen und über den Werth von (k) und die Bedeutung der Charakteristiken w_i passend zu verfügen hat, um zu folgendem Systeme zu gelangen:

$$(49)\quad \left|\begin{aligned} \lambda_h &= \frac{\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)}{\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)},\\ \mu_h &= \frac{i\vartheta_h}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_h(u_1+a)+e^{-u_2}\vartheta_h(u_1-a)],\\ \nu_h &= -\frac{\vartheta_h}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_h(u_1+a)-e^{-u_2}\vartheta_h(u_1-a)],\end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

worin

$$\vartheta_1(x)=\sqrt{i}\,\vartheta_{00}(x),\qquad \vartheta_2(x)=\vartheta_{01}(x),\qquad \vartheta_3(x)=\vartheta_{10}(x);$$

$$\vartheta_h=\vartheta_h(0)$$

ist.

Die Differentiation liefert

$$(49')\quad \left|\begin{aligned} \frac{d\lambda_h}{du} &= A'\nu_h - A''\mu_h,\\ \frac{d\mu_h}{du} &= A''\lambda_h - A\nu_h,\\ \frac{d\nu_h}{du} &= A\mu_h - A'\lambda_h;\end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

$$\begin{aligned} A &= +i\frac{du_1}{du}\left[\frac{du_2}{du_1}+\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}\right],\\ A' &= -i\frac{du_1}{du}\frac{\vartheta'_{11}}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a)+e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)],\\ A'' &= -i\frac{du_1}{du}\frac{\vartheta'_{11}}{2\vartheta_{11}(a)\vartheta_{11}(u_1)}[e^{u_2}\vartheta_{11}(u_1+a)-e^{-u_2}\vartheta_{11}(u_1-a)].\end{aligned}$$

Die Berücksichtung der Gleichungen (32) und (33) erweist sofort die Identität der Systeme (49′) und (2). Die zu bestimmenden Werthe von λ_h, μ_h, ν_h sind also den Ausdrücken von (49) entweder direkt gleich, oder sie setzen sich aus diesen linear zusammen. Wir wollen zunächst das erstere annehmen und den Beweis dafür, dass diese Annahme die einzig zulässige ist, später geben.

§ 9.

Da nunmehr alle Quantitäten in ihrer Abhängigkeit von den Variabeln u und v dargestellt sind, so erübrigt nur noch die Aufstellung der Gleichungen für die Coordinaten X_1, X_2, X_3 eines Punktes der Fläche.

Setzt man

$$(50)\qquad \left|\begin{aligned} n_h R\cos\sigma - m_h R\sin\sigma &= r_h \\ -\, i m_h R\cos\sigma - i n_h R\sin\sigma &= t_h, \end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

so liefert (5) mit Berücksichtigung von (3):

$$(51)\qquad \left|\begin{aligned} X_1 - V &= \frac{\sum_h t_h\lambda_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \\ X_2 &= -\frac{\sum_h r_h\nu_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \\ X_3 &= \frac{\sum_h r_h\mu_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \end{aligned}\right. \qquad (h=1,2,3)$$

wobei noch zu bemerken ist, dass r_h einem ϑ-Quotienten gleich ist:

$$(52)\qquad r_h = -\, i e^{\frac{\pi i}{2}(k)(w_h)'} (-1)^{(w_5)(e)'+(w_h)(w_4 e)'} \cdot \frac{c_5' c_{51} c_{42} c_{43}}{c c_n^2 c_{26} c_{36}} \frac{\vartheta(k w_h)(v)}{\vartheta(k)(v)}. \qquad (h=1,2,3)$$

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, dass das Krümmungsmass der Fläche thatsächlich constant ist, und im Anschluss daran, dass die bezüglich der λ_h, μ_h, ν_h getroffene Verfügung eine nothwendige war.

Für P, f, Q und g bestehen die Gleichungen (6) und (7):

$$P = -p_1 z_2 - p_2 z_3 = -\frac{\sum_h n_h(p_2\mu_h - p_1\nu_h)}{\sum_h l_h\lambda_h} = -\frac{\sum_h n_h\pi_h}{\sum_h l_h\lambda_h}$$

$$f = PR\cos\sigma - MR\sin\sigma = -\frac{\sum_h (p_2\mu_h - p_1\nu_h)(R\cos\sigma n_h - R\sin\sigma m_h)}{\sum_h l_h\lambda_h} = -\frac{\sum_h r_h\pi_h}{\sum_h l_h\lambda_h}$$

$$Q = -q_1 z_1 - q_2 = \frac{\sum_h \lambda_h(i q_1 m_h - q_2 l_h)}{\sum_h l_h\lambda_h} = \frac{\sum_h r_h'\lambda_h}{\sum_h l_h\lambda_h}$$

$$g = QR\cos\sigma + \frac{dV}{dv}y_1 - \frac{dR\sin\sigma}{dv} = \frac{\sum_h \lambda_h\left[R\cos\sigma r_h' + R\sin\sigma\frac{dl_h}{dv} - l_h\frac{dR\sin\sigma}{dv}\right]}{\sum_h l_h\lambda_h}$$

$$\frac{\sum_h \lambda_h n_h'}{\sum_h l_h\lambda_h}.$$

Sucht man die neueingeführten Grössen π_h, r'_h, n'_h zu bestimmen, so findet man nach zum Teil höchst langwierigen Rechnungen:

$$\pi_1 = -\frac{\vartheta_1\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)\vartheta'_{11}}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta^2_{11}(a)}\frac{du_1}{du}\cdot\frac{\vartheta_1(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1)} \quad \text{etc.}$$

$$r'_1 = -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_1)'}(-1)^{(w_5)(w_6 w_1)'+(w_1 w_5)(w_4 e)'}\frac{c'_5 c_{51} c_{62} c_{63}}{c^2_1 c_{42} c_{43}}\frac{\vartheta(kw_1)(v)}{\vartheta(k)(v)} \quad \text{etc.}$$

$$n'_1 = -e^{-\frac{\pi i}{2}(k)(w_1 w_4)'}(-1)^{(w_4)(w_1)'+(k)(w_6 e)'}\frac{i_1 c'_5 c'_5 c^2_{41}}{c c^3_0 c_{61}}\frac{\vartheta(kw_1 w_6)(v)}{\vartheta(k)(v)} \quad \text{etc.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (29) und (36) zuzieht und abkürzend

$$\frac{ic}{k^2 s_h} = \tau_h$$

setzt:

$$\pi_h = -\tau_h\lambda_h, \qquad r'_h = k\tau_h r_h, \qquad n'_h = \tau_h n_h.$$

Mithin ist

$$P = \frac{\sum_h n_h\lambda_h\tau_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \qquad f = \frac{\sum_h r_h\lambda_h\tau_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \qquad Q = k\frac{\sum_h r_h\lambda_h\tau_h}{\sum_h l_h\lambda_h}, \qquad g = \frac{\sum_h n_h\lambda_h\tau_h}{\sum_h l_h\lambda_h}.$$

Hieraus folgt (8): $PQ = kfg$, worin sich die Constanz des Krümmungsmasses ausspricht.

Hätte man aber λ_h, μ_h, ν_h zu ersetzen durch resp.

$$a_{h1}\lambda_1 + a_{h2}\lambda_2 + a_{h3}\lambda_3$$
$$a_{h1}\mu_1 + a_{h2}\mu_2 + a_{h3}\mu_3$$
$$a_{h1}\nu_1 + a_{h2}\nu_2 + a_{h3}\nu_3,$$

so würde auch π_h in

$$a_{h1}\pi_1 + a_{h2}\pi_2 + a_{h3}\pi_3 = -a_{h1}\tau_1\lambda_1 - a_{h2}\tau_2\lambda_2 - a_{h3}\tau_3\lambda_3$$

übergehen, und man erhielte für P, f, Q und g die Ausdrücke:

$$P = \frac{\sum_h\sum_k a_{hk} n_h\lambda_k\tau_k}{\sum_h\sum_k a_{hk} l_h\lambda_k},$$

$$f = \frac{\sum_h\sum_k a_{hk} r_h\lambda_k\tau_k}{\sum_h\sum_k a_{hk} l_h\lambda_k}, \qquad (h, k = 1, 2, 3)$$

$$Q = k\frac{\sum_h\sum_k a_{hk} r_h\lambda_k\tau_h}{\sum_h\sum_k a_{hk} l_h\lambda_k},$$

$$g = \frac{\sum_h\sum_k a_{hk} n_h\lambda_k\tau_h}{\sum_h\sum_k a_{hk} l_h\lambda_k}.$$

Die Gleichungen (9)

$$P = g, \qquad Q = kf$$

würden dann die Relationen

$$a_{hk}(\tau_h - \tau_k) = 0$$

zur Folge haben, die ihrerseits

$$a_{hk} = 0 \qquad (h \gtrless k)$$

ergeben müssen, weil im allgemeinen τ_h nicht gleich τ_k ist.

THEORIE DER ABEL'SCHEN ZAHLKÖRPER

VON

H. WEBER
in MARBURG.

IV. ÜBER DIE BILDUNG ABEL'SCHER KÖRPER MIT GEGEBENER GRUPPE.

In den drei vorangegangenen, die Abel'schen Zahlkörper betreffenden Arbeiten (Acta Mathematica, Bd. 8) ist die Identität des Begriffs der Abel'schen mit den Kreiskörpern nachgewiesen, und damit zugleich die Theorie aller Abel'schen Zahlkörper auf die allgemeine Theorie der Kreisteilungsperioden zurückgeführt.

Eine tiefer greifende Einteilung der Abel'schen Körper wird sich, wie bei algebraischen Fragen überhaupt, auf die Beschaffenheit der Gruppe zu gründen haben. Die Constitution einer Abel'schen Gruppe kann aber, wie zunächst gezeigt werden wird, vollständig charakterisiert werden durch eine gewisse Reihe ganzer Zahlen, die *Gruppeninvarianten,* und indem wir die Gruppe als durch ihre Invarianten definiert annehmen, stellen wir die Aufgabe

I. *Alle Abel'schen Körper von gegebener Gruppe zu bestimmen.*

Nach den Ergebnissen der vorangegangenen Arbeiten (I, § 5) hat man hierzu nur nöthig, *Kreisteilungsperioden* mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften zu bilden.

Es ist aber bereits in der Abhandlung I, § 4, darauf hingewiesen, dass ein und derselbe Abel'sche Körper in *mehreren* vollständigen Kreiskörpern enthalten ist, d. h. durch Einheitswurzeln *verschiedener* Grade dargestellt werden kann, und hiernach muss die Aufgabe I noch dahin ergänzt werden

II. *Abel'sche Körper von beliebig gegebener Gruppe durch Einheitswurzeln möglichst niedrigen Grades darzustellen.*[1]

§ 1. *Die Gruppeninvarianten.*

Es ist, wie schon in der Abhandlung I, § 1, erwähnt, eine fundamentale Eigenschaft Abel'scher Gruppen, durch eine Basis darstellbar zu sein, und man kann die Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ einer solchen Basis so auswählen und anordnen, dass von den Graden $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ dieser Elemente jeder durch den folgenden teilbar ist. Die Bestimmung einer solchen Basis ist auf mehrfache Art möglich; wie diese aber auch gewählt sein mag, die *Zahlen* $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, *deren Product* e *gleich dem*

[1] Die Aufgabe I ist für Abel'sche Körper mit *regulärer Gruppe* (einfache Abel'sche Körper) von KRONECKER im Monatsbericht der Berliner Akademie vom 14ten April 1856 behandelt. (Vgl. auch den IIIten Brief in dem in den Göttinger Nachrichten vom 16ten Dez. 1885 veröffentlichten Briefwechsel zwischen DIRICHLET und KRONECKER.) Das dortige Resultat bedarf einer kleinen Ergänzung, in so fern, wenn man nach KRONECKER's Vorschrift verfährt, noch Perioden erhalten werden, welche einen verschwindenden Wert haben. Nimmt man z. B. $n = 6$, $m = 63$, $p_1 = 3$, $p_2 = 7$, $b_1 = 3$, $b_2 = 1$, so erhält man nach Formel II der KRONECKER'schen Abhandlung, wenn ρ eine primitive 63te Einheitswurzel bedeutet, $\tilde{\omega}(\rho) = \rho + \rho^{22} + \rho^{43} + \rho^{-1} + \rho^{-22} + \rho^{-43}$, was den Wert 0 hat. Dies rührt daher, dass p_1 ein mehrfacher Factor von m und zugleich ein Teiler von b_1 ist. Um die Bedeutung unserer Forderung II gleich hier durch ein einfaches Beispiel ins Licht zu setzen, nehmen wir $n = 3$, $m = 35 = 5 \cdot 7$, woraus sich, wenn ρ eine primitive 35te Einheitswurzel bedeutet, die Periode

$$\tilde{\omega}(\rho) = \rho + \rho^{8} + \rho^{22} + \rho^{29} + \rho^{-1} + \rho^{-8} + \rho^{-22} + \rho^{-29}$$

ergiebt, welche aber $= -(\rho^{15} + \rho^{-15})$ ist und also schon unter den Perioden der 7ten Einheitswurzeln vorkommt. Etwas anders verhalten sich wieder die 91ten Einheitswurzeln. Denn während man aus 35ten Einheitswurzeln überhaupt keine Perioden bilden kann, welche die Wurzeln cubischer Gleichungen sind, die nicht bereits unter den Perioden der 7ten Einheitswurzeln vorkommen, ist dies bei den 91ten Einheitswurzeln möglich, während andere wieder bereits unter den Perioden der 7ten oder der 13ten Einheitswurzeln vorkommen. Dieser Unterschied beruht darauf, dass alle Primfactoren von 91 nach dem Modul 3 mit 1 congruent sind, was bei 35 nicht der Fall ist.

Grade der Gruppe ist, sind immer dieselben und werden daher nicht unpassend die *Invarianten der Gruppe genannt.*[1]

Es soll hier eine Eigenschaft dieser Zahlenreihe nachgewiesen werden, welche die erwähnte Invarianz in sich schliesst, aber noch schärfer die fundamentale Bedeutung dieser Zahlen, oder genauer gesagt der in ihnen enthaltenen Primzahlpotenzen hervortreten lässt.

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ *die höchsten Potenzen einer Primzahl* p, *welche in* $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ *enthalten sind, so sind unter den Gradzahlen der Elemente einer beliebigen Basis der Gruppe immer* ν *solche enthalten, welche durch* $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *aber durch keine höhere Potenz von* p *teilbar sind, während die Gradzahlen der übrigen Elemente der Basis (falls solche vorhanden) durch* p *unteilbar sind.*

Wir können diesem Satz, ohne seinen Inhalt zu ändern, eine etwas weitere Fassung geben, welche zugleich den Beweis vereinfacht. Es seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu$$

mit den Graden

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$$

und

$$b_1, b_2, \ldots, b_\mu$$

mit den Graden

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$$

irgend zwei Basen einer Gruppe $\mathfrak{A}$, so dass alle Elemente a der Gruppe $\mathfrak{A}$, und jedes nur einmal, dargestellt wird, wenn man in einem der beiden Ausdrücke

(1) $$a = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_\nu^{x_\nu}$$

(2) $$a = b_1^{y_1} b_2^{y_2} \ldots b_\mu^{y_\mu}$$

die Exponenten x_h je ein vollständiges Restsystem modulo α_h oder die Exponenten y_h ein solches modulo β_h durchlaufen lässt.

[1] Diese Bezeichnung ist zuerst gebraucht in der Abhandlung von Frobenius und Stickelberger, *Über Gruppen vertauschbarer Elemente,* (Crelle's Journal, Bd. 86, § 7), woselbst sich zwei Beweise für den Satz finden. Im übrigen sind noch zu erwähnen Schering, *Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen,* Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 14; Kronecker, Monatsbericht der Berliner Akademie 1 Dez. 1870; Weber, *Beweis des Satzes etc.*, Mathematische Annalen, Bd. 20, S. 301.

Ist nun p eine im Grade von $\mathfrak{A}$ aufgehende Primzahl und

$$(3)\qquad \alpha_1 = p_1\alpha'_1, \qquad \alpha_2 = p_2\alpha'_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu = p_\nu\alpha'_\nu$$

$$(4)\qquad \beta_1 = p'_1\beta'_1, \qquad \beta_2 = p'_2\beta'_2, \quad \ldots, \quad \beta_\mu = p'_\mu\beta'_\mu$$

worin die p_h, p'_h Potenzen von p und α'_h, β'_h durch p unteilbar sind, so sind diejenigen unter den $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, welche grösser als 1 sind, auch unter den $p'_1, p'_2, \ldots, p'_\mu$ enthalten und umgekehrt.

Beim Beweis dieses Satzes setzen wir die Anordnung der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ so voraus, dass

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_\nu$$

$$p'_1 \geq p'_2 \geq \ldots \geq p'_\mu.$$

Ist α das kleinste gemeinschaftliche Multiplum von $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\nu$, so ist für alle Elemente a der Gruppe $\mathfrak{A}$

$$a^{\alpha p_1} = 1$$

woraus hervorgeht, dass αp_1 durch jede der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ teilbar ist. Es ist also p_1 teilbar durch p'_1 und α durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_\mu$. Da nun in diesem Schluss die a_h mit den b_h vertauscht werden können, so folgt, dass α zugleich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_\mu$ ist und dass ausserdem

$$(5)\qquad p_1 = p'_1.$$

Wir setzen nun voraus, es sei für irgend eine Zahl s bewiesen

$$(6)\qquad p_1 = p'_1, \qquad p_2 = p'_2, \quad \ldots, \quad p_{s-1} = p'_{s-1},$$

und bestimmen die Anzahl aller von einander verschiedenen in der Form $a^{\alpha p_s}$ enthaltenen Elemente der Gruppe a. Die Darstellung (1) liefert uns

$$(7)\qquad a^{\alpha p_s} = a_1^{x_1\alpha p_s} a_2^{x_2\alpha p_s} \ldots a_{s-1}^{x_{s-1}\alpha p_s},$$

woraus sich für die Anzahl der verschiedenen unter diesen Elementen

$$\frac{p_1}{p_s} \cdot \frac{p_2}{p_s} \cdots \frac{p_{s-1}}{p_s} \tag{8}$$

ergiebt. Ebenso gross ist aber auch nach unserer Voraussetzung die Anzahl der von einander verschiedenen in der Form

$$b_1^{y_1 a p_s} b_2^{y_2 a p_s} \dots b_{s-1}^{y_{s-1} a p_s} \tag{9}$$

enthaltenen Elemente, und daher müssen (nach der Darstellung (2)) alle Elemente von der Form

$$a^{a p_s} = b_1^{y_1 a p_s} b_2^{y_2 a p_s} \dots b_\mu^{y_\mu a p_s}$$

in der Form (9) enthalten sein. Also muss, wegen der Fundamentaleigenschaft der Basis, p_s teilbar sein durch p'_s. Da man aber wieder ebenso den umgekehrten Schluss machen kann, so folgt

$$p_s = p'_s, \tag{10}$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Wie man also auch die Abel'sche Gruppe durch eine Basis darstellen mag, die Gradzahlen der Elemente dieser Basis sind stets aus denselben Primzahlpotenzen zusammengesetzt. Man kann die Basis unter anderen auch so wählen, dass die Grade ihrer Elemente diese Primzahlpotenzen selbst sind.

Um die Gruppeninvarianten zu erhalten ordnet man die Potenzen der verschiedenen Primzahlen in absteigender Reihe nach der Höhe des Exponenten und multipliciert dann die entsprechenden Glieder dieser Reihen, wobei man, um Reihen von gleicher Gliederzahl zu erhalten, die 1 zu Hülfe nehmen muss. Diese Zusammenfassung der Primzahlpotenzen ist nicht sehr wesentlich, soll aber zur Vereinfachung der Darstellung hier beibehalten werden.

Da in der Reihe der Gruppeninvarianten

$$e_1, e_2, \dots, e_\nu$$

jede Zahl durch die folgende teilbar ist, so sind die Quotienten

$$\frac{e_1}{e_2} = \delta_1, \quad \frac{e_2}{e_3} = \delta_2, \quad \dots, \quad \frac{e_{\nu-1}}{e_\nu} = \delta_{\nu-1}, \quad e_\nu = \delta_\nu \tag{11}$$

ganze Zahlen, aus denen sich die Gruppeninvarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ und der Grad e der Gruppe in folgender Weise zusammensetzen

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
e_1 &= \delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\nu \\
e_2 &= \delta_2\delta_3 \ldots \delta_\nu \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_{\nu-1} &= \delta_{\nu-1}\delta_\nu \\
e_\nu &= \delta_\nu
\end{aligned}
$$

$$
(13) \qquad e = \delta_1\delta_2^2\delta_3^3 \ldots \delta_\nu^\nu .
$$

Die Zahlen δ sind ebenso wie die Zahlen e nur von der Natur der Gruppe abhängig und haben vor letzteren noch den Vorzug, dass sie keiner Beschränkung unterworfen sind. In gewissem Sinne würde es sich daher empfehlen, die Zahlen δ als die Invarianten der Gruppe zu bezeichnen. Wir wollen aber gleichwohl bei der anderweit schon gebrauchten Bezeichnung stehen bleiben.

Zwei Gruppen, deren Elemente sich einander in der Weise eindeutig zuordnen lassen, dass durch die Zusammensetzung entsprechender Elemente wieder entsprechende Elemente entstehen, heissen *isomorph.*[1]

Wenn nun zwei Gruppen dieselben Invarianten $e_1, e_2, \ldots; e_\nu$ *haben, so sind die Gruppen isomorph.*

Denn wählt man für jede derselben eine Basis $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ so, dass in der Form

$$
g_1^{x_1} g_2^{x_2} \cdots g_\nu^{x_\nu}
$$

alle Elemente, und jedes nur einmal, enthalten sind, wenn x_h modulo e_h genommen wird, so kann man diejenigen Elemente beider Gruppen einander entsprechen lassen, in welchen die Exponenten x_h dieselben Werte haben, woraus der Isomorphismus erhellt.

[1] C. Jordan, von dem dieser Ausdruck herrührt, nennt solche Gruppen »holoëdrisch isomorph». Da der meriëdrische Isomorphismus hier gar nicht in Betracht kommt, so lassen wir diese Unterscheidung weg.

Löst man den Begriff der Gruppe gänzlich ab von der besonderen Bedeutung, welche die Elemente derselben in jedem einzelnen Falle haben, und fasst die Definition nur formal, so kann man isomorphe Gruppen auch schlechthin als identisch bezeichnen und in diesem Sinne sagen, dass durch die Invarianten die Gruppe vollständig bestimmt sei.

§ 2. *Die Gruppencharaktere.*

Eine Function $\chi(a)$, d. h. ein System von e (gleichen oder verschiedenen) von Null verschiedenen Zahlwerten, deren jeder einem bestimmten Element a der Gruppe $\mathfrak{A}$ zugeordnet ist, heisst ein *Gruppencharakter*, wenn für irgend zwei Elemente a, a' der Gruppe $\mathfrak{A}$ die Bedingung erfüllt ist

(1) $$\chi(aa') = \chi(a)\chi(a').$$

Solcher Gruppencharaktere existieren genau e von einander verschiedene, d. h. solche, deren je zwei mindestens für ein Element a in $\mathfrak{A}$ verschiedene Werte haben, und alle sind e^{te} Einheitswurzeln.

Denn zunächst folgt aus (1), indem man $a' = 1$ annimmt

$$\chi(a) = \chi(a)\chi(1),$$

also:

(2) $$\chi(1) = 1.$$

Bedeutet nun wie in § 1 $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ eine Basis der Gruppe $\mathfrak{A}$, deren Elemente die Grade $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ haben, so ist für jedes Element a

(3) $$a = g_1^{x_1} g_2^{x_2} \cdots g_\nu^{x_\nu},$$

und aus (1) folgt

(4) $$\chi(a) = \chi(g_1)^{x_1}\chi(g_2)^{x_2}\cdots\chi(g_\nu)^{x_\nu},$$

und

(5) $$\chi(g_1)^{e_1} = 1, \quad \chi(g_2)^{e_2} = 1, \quad \ldots, \quad \chi(g_\nu)^{e_\nu} = 1.$$

Verstehen wir also unter

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$$

primitive Einheitswurzeln der Ordnung

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

so lassen sich die ganzen Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ nach den Moduln $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ so bestimmen, dass

$$(6) \qquad \chi(g_1) = \theta_1^{y_1}, \qquad \chi(g_2) = \theta_2^{y_2}, \quad \ldots, \quad \chi(g_\nu) = \theta_\nu^{y_\nu},$$

und daher

$$(7) \qquad \chi(a) = \theta_1^{y_1 x_1} \theta_2^{y_2 x_2} \ldots \theta_\nu^{y_\nu x_\nu}$$

wird.

Nehmen wir umgekehrt das Zahlensystem $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ beliebig an, so genügt (7) der Bedingung (1) und ist daher ein Gruppencharakter. Auch sind die auf diese Weise gebildeten e Gruppencharaktere alle von einander verschieden; denn wählen wir in (7) zwei verschiedene Exponentensysteme y, welchen die beiden Charaktere χ, χ' entspringen, so kann man stets ein System der x, d. h. ein Element a finden, so dass $\chi(a)$ von $\chi'(a)$ verschieden wird.

Ebenso aber giebt es, wenn a, a' verschiedene Elemente in $\mathfrak{A}$ sind, unter den Charakteren χ gewiss immer solche für welche $\chi(a)$ von $\chi(a')$ verschieden ist.

Ein Element a ist also vollständig und eindeutig bestimmt durch die Zahlenwerte der e Charaktere $\chi(a)$.[1]

Jedem System der Zahlen y entspricht nach der Formel

$$(8) \qquad a' = g_1^{y_1} g_2^{y_2} \ldots g_\nu^{y_\nu}$$

ein und nur ein Element a' der Gruppe $\mathfrak{A}$, *so dass sich die durch (7) bestimmten e Charaktere selbst in eindeutiger Weise den Elementen der Gruppe $\mathfrak{A}$ zuordnen lassen.* Indem wir diese Zuordnung in die Bezeichnung aufnehmen, setzen wir, wenn die Zahlensysteme x, y durch (3) und (8) bestimmt sind

$$(9) \qquad \chi_{a'}(a) = \chi_a(a') = \theta_1^{y_1 x_1} \theta_2^{y_2 x_2} \ldots \theta_\nu^{y_\nu x_\nu}.$$

Verstehen wir unter $\chi_{a'} \chi_{a''}$ den Charakter $\chi_{a'a''}(a)$, so bilden nach dieser Zusammensetzung *die Charaktere unter sich eine Abel'sche Gruppe, welche mit der gegebenen Gruppe $\mathfrak{A}$ isomorph ist.*

[1] Diese Sätze sind bewiesen in der oben citierten Abhandlung des Verfassers und sind in der Abhandlung I zum Teil benutzt. Des leichteren Verständnisses halber sind die Beweise in obigen Text, zum Teil etwas vereinfacht, wiederholt.

§ 3. *Divisoren Abel'scher Gruppen.*

Wir betrachten jetzt eine Abel'sche Gruppe $\mathfrak{N}$ vom Grade N, deren Elemente mit n und deren Charaktere mit $\chi_{n'}(n)$ bezeichnet sein mögen.

Ist $\mathfrak{A}$ eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Gruppe, d. h. ein System von in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Elementen a von der Art, dass das Product zweier a immer wieder ein Element in $\mathfrak{A}$ ist, so lässt sich die Gruppe $\mathfrak{N}$ in *Reihen* von gleich viel Elementen in folgender Weise zerfällen.

Ist a_1 ein in $\mathfrak{N}$ aber nicht in $\mathfrak{A}$ enthaltenes Element, so sind auch alle Elemente aa_1 zwar in $\mathfrak{N}$ aber nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten. Die Gesammtheit dieser Producte $a_1 a$, welche ebenso viele Zahlen wie $\mathfrak{A}$ selbst enthält, werde mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnet.

Ist a_2 ein in $\mathfrak{N}$, aber weder in $\mathfrak{A}$ noch in $\mathfrak{A}_1$ enthaltenes Element, so gilt das gleiche von allen Producten $a_2 a$, und deren Gesammtheit bildet ein System $\mathfrak{A}_2$ von ebenso vielen Elementen wie $\mathfrak{A}$. Fährt man auf diese Weise fort, bis die Gruppe $\mathfrak{N}$ erschöpft ist, so wird $\mathfrak{N}$ in eine bestimmte Anzahl von *Reihen*

$$(1) \qquad \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{e-1}$$

zerlegt, deren jede gleichviel, also $N:e$ Elemente enthält, von denen aber nur die erste eine Gruppe ist.

Wenn man nun die Zusammensetzung dieser Reihen in der Weise erklärt, dass $\mathfrak{A}_h \mathfrak{A}_k$ die aus den Elementen $a_h a_k a$ gebildete Reihe sein soll, so bilden diese Reihen unter sich eine Abel'sche Gruppe $\mathfrak{R}$ vom Grade e, in welcher die Gruppe $\mathfrak{A}$ als Einheit gilt.

Wie die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{R}$ aus denen der Gruppe $\mathfrak{N}$ hergeleitet werden, ist schon in der Abhandlung I, § 3, gezeigt. Wir kommen hier in der Kürze darauf zurück.

Ist $\xi(\mathfrak{A}_k)$ einer dieser Charaktere, so können wir setzen:

$$(2) \qquad \xi(\mathfrak{A}_k) = \xi(a_k a) = \xi(n)$$

wodurch eine Function $\xi(n)$ für jedes Element von $\mathfrak{N}$ definiert ist, welche für alle Elemente einer der Reihen (1) einen und denselben Wert hat, und für alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}$ den Wert 1.

Diese Function genügt aber der Bedingung

$$\xi(\mathfrak{A}_h)\xi(\mathfrak{A}_k) = \xi(\mathfrak{A}_h\mathfrak{A}_k),$$

d. h. nach der Erklärung der Zusammensetzung der Reihen $\mathfrak{A}_h$, $\mathfrak{A}_k$,

$$\xi(n)\xi(n') = \xi(nn'), \tag{3}$$

und ist also nach § 2 unter den Charakteren $\chi(n)$ der Gruppe $\mathfrak{N}$ enthalten.

Ist umgekehrt $\xi(n)$ einer der Charaktere $\chi(n)$, welcher der Bedingung

$$\xi(a) = 1 \tag{4}$$

genügt, so ist auch

$$\xi(a_k a) = \xi(a_k) \tag{5}$$

für alle a und kann daher mit $\xi(\mathfrak{A}_k)$ bezeichnet werden. Es besteht aber zugleich die Relation

$$\xi(\mathfrak{A}_h)\xi(\mathfrak{A}_k) = \xi(\mathfrak{A}_h\mathfrak{A}_k) \tag{6}$$

und es ist also diese Function einer der Charaktere von $\mathfrak{N}$.

Es folgt hieraus, dass die Bedingung (4) für genau e unter den Charakteren $\chi(n)$ erfüllt ist.

Wenden wir also die am Schlusse des vorigen Paragraphen eingeführte Bezeichnung an, so erhalten wir die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{N}$ in der Form $\chi_b(n)$, wenn wir alle diejenigen Elemente b in der Gruppe $\mathfrak{N}$ aufsuchen, welche für *alle Elemente* a der Bedingung genügen

$$\chi_b(a) = 1. \tag{7}$$

Diese Elemente b bilden eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{B}$, welche mit $\mathfrak{N}$ isomorph ist, und der zu $\mathfrak{A}$ reciproke Divisor von $\mathfrak{N}$ genannt sein soll.

Die Gruppe $\mathfrak{B}$ ist durch die Gruppe $\mathfrak{A}$ vollständig bestimmt und die Beziehung beider ist eine gegenseitige. Das Product der Grade zweier reciproker Teiler von $\mathfrak{N}$ ist gleich dem Grade von $\mathfrak{N}$.

§ 4. *Die Gruppe der Potenzreste für einen zusammengesetzten Modul.*

Wir verstehen jetzt unter $\mathfrak{N}$ die Gruppe der nach irgend einem Modul m genommenen *zu m teilerfremden* Zahlen n, welche sich, wenn zwei nach dem Modul m congruente Zahlen als nicht verschieden betrachtet werden, durch Multiplication, welche hier die Stelle der Zusammensetzung vertritt, reproducieren.

Sei also

$$m = 2^{\lambda} q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots \tag{1}$$

der Modul, $q_1, q_2, \ldots$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen, $k_1, k_2, \ldots$ positive Exponenten und λ entweder $= 0$ oder ≥ 2, ($\lambda = 1$ hat für unsere Aufgabe kein Interesse).

Bedeuten $c_1, c_2, \ldots$ primitive Wurzeln von $q_1^2, q_2^2, \ldots$ so sind, wie aus der Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduln bekannt ist, für jede Zahl n die Exponenten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ nach den Moduln

$$q_1^{k_1-1}(q_1 - 1),\ q_2^{k_2-1}(q_2 - 1),\ \ldots$$

vollständig und eindeutig dadurch bestimmt, dass

$$n \equiv c_1^{\gamma_1} \pmod{q_1^{k_1}}, \qquad n \equiv c_2^{\gamma_2} \pmod{q_2^{k_2}}, \quad \ldots$$

Ist $\lambda = 2$, so ist ebenso α nach dem Modul 2 durch die Congruenz

$$n \equiv (-1)^{\alpha} \pmod 4$$

und ist $\lambda > 2$ so sind α, β nach den Moduln $2, 2^{\lambda-2}$ durch die Congruenz

$$n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\beta} \pmod{2^{\lambda}}$$

bestimmt.

Die auf diese Weise bestimmten Exponenten, nämlich

$$\begin{array}{rl} \gamma_1, \gamma_2, \ldots & \text{wenn } m \text{ ungerade} \\ \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \ldots & \text{wenn } m \equiv 4 \pmod 8 \\ \alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots & \text{wenn } m \equiv 0 \pmod 8 \end{array}$$

heissen die *Indices* der Zahl n und sollen in irgend einer Reihenfolge mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$$

bezeichnet werden, während wir die Moduln, nach welchen diese Indices genommen sind, nämlich

$$\begin{array}{ll} q_1^{k_1-1}(q_1-1),\ q_2^{k_2-1}(q_2-1), \ldots & \text{wenn } m \text{ ungerade} \\ 2,\ q_1^{k_1-1}(q_1-1),\ q_2^{k_2-1}(q_2-1), \ldots & \text{wenn } m \equiv 4 \pmod 8 \\ 2,\ 2^{\lambda-2},\ q_1^{k_1-1}(q_1-1),\ q_2^{k_2-1}(q_2-1), \ldots & \text{wenn } m \equiv 0 \pmod 8 \end{array}$$

mit

$$m_1, m_2, \ldots, m_\mu$$

bezeichnen, und zwar so dass α_1 der zum Modul m_1 gehörige Index heisst.

Die Anzahl μ der Indices ist also gleich der Anzahl der von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, oder, falls m durch 8 teilbar ist, um eins grösser.

Ist ein System von Zahlwerten für die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ nach dem System der Moduln $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ beliebig gegeben, so gehört dazu umgekehrt eine nach dem Modul m vollständig bestimmte Zahl n. Die Indices eines Productes zweier Zahlen sind die Summen der entsprechenden Indices der einzelnen Factoren.

Wenn wir also jeden der Indices ein vollständiges Restsystem nach seinem Modul durchlaufen lassen, so erhalten wir die ganze Gruppe $\mathfrak{N}$ vom Grade

$$\varphi(m) = m_1 m_2 \ldots m_\mu.$$

Um die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{N}$ zu erhalten, wählen wir ein System primitiver Einheitswurzeln der Ordnung $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu.$$

Sind alsdann $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\mu$ die Indices irgend einer Zahl n' in $\mathfrak{N}$, so erhält man die $\varphi(n)$ Charaktere $\chi_{n'}(n)$ in der Form

$$\chi_{n'}(n) = \omega_1^{\alpha_1\alpha'_1}\omega_2^{\alpha_2\alpha'_2} \ldots \omega_\mu^{\alpha_\mu\alpha'_\mu}.$$

§ 5. *Die Kreisteilungsperioden.*

Bedeutet r eine primitive m^{te} Einheitswurzel, und $\mathfrak{A}$ irgend eine in $\mathfrak{R}$ enthaltene Gruppe, so heisst die Summe

$$(1) \qquad \eta = \sum^{a} r^{a}$$

eine *Kreisteilungsperiode* und man hat nun zunächst auf zwei Umstände zu achten:

1. Nach Abhandlung I, § 5, verschwindet η *dann* und *nur dann* wenn für irgend eine *mehrfach* in m aufgehende Primzahl q alle der Bedingung

$$a \equiv 1 \pmod{\frac{m}{q}}$$

genügende Zahlen n in $\mathfrak{A}$ enthalten sind.

2. Wenn die in 1 erwähnte Bedingung nicht, dagegen für einen *einfachen* Primfactor q von m *alle in* $\mathfrak{R}$ *enthaltenen* der Bedingung

$$a \equiv 1 \pmod{\frac{m}{q}}$$

genügende Zahlen zugleich in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, aber auch *nur* unter dieser Voraussetzung kann η durch Einheitswurzeln von niedrigerer Ordnung ausgedrückt werden. (I, § 4.)

Es lässt sich diese Darstellung auch leicht finden; denn es besteht in diesem Falle $\mathfrak{A}$ aus lauter Zahlen von der Form

$$a'\left(1 + h\frac{m}{q}\right),$$

worin h die Reihe der Zahlen $0, 1, \ldots, q-1$ mit Ausnahme derjenigen, für welche

$$1 + h\frac{m}{q} = kq$$

ein Vielfaches von q ist, und a' eine Gruppe $\mathfrak{A}'$ für den Modul $m:q$ durchläuft. Dann ergiebt sich aber

$$\eta = \sum^{a} r^{a} = -\sum^{a'} r^{qka'},$$

also η (vom Vorzeichen abgesehen) gleich einer aus Einheitswurzeln der Ordnung $m:q$ gebildeten Periode.

Es sei nun wieder $\mathfrak{A}$ irgend eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Gruppe vom Grade $\varphi(m):e$, und es werde überhaupt an den Bezeichnungen der §§ 3, 4 festgehalten. Unter den mit η *conjugierten* Perioden

$$(2) \qquad \eta_n = \sum^{a} r^{na}$$

sind, wenn nicht der Ausnahmefall 1 eintritt, in welchem dieselben alle verschwinden, e von einander verschieden, entsprechend den e Reihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{e-1}$ des § 3, nämlich

$$(3) \qquad \eta, \eta_{a_1}, \eta_{a_2}, \ldots, \eta_{a_{e-1}},$$

und diese sind die Wurzeln einer irreducibeln ganzzahligen Gleichung e^{ten} Grades (I, § 5). Die rationalen Functionen von η mit rationalen Zahlencoefficienten constituiren einen Kreiskörper, und es ist das Hauptergebniss der drei vorangegangenen Abhandlungen, dass man auf diese Weise alle Abel'schen Körper erhält, und, wenn man den Ausnahmefall 2 noch ausschliesst, jeden nur einmal.

Die Permutationsgruppe des auf diese Weise gebildeten Körpers (oder die Galois'sche Gruppe der Gleichung für η) besteht aus den e Substitutionen

$$(4) \qquad (\eta, \eta_{a_k}) = (\eta_{a_h}, \eta_{a_h a_k}),$$

und ist also isomorph mit der Gruppe $\mathfrak{R}$ der Reihen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{e-1}$, oder auch *isomorph mit der zu $\mathfrak{A}$ reciproken Gruppe $\mathfrak{B}$*.

Will man also Abel'sche Körper bilden, deren Gruppe vorgeschriebene Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ hat, so wird man zunächst nicht auf die Bildung der Gruppe $\mathfrak{A}$, sondern auf die der reciproken Gruppe $\mathfrak{B}$ ausgehen, welche eben diese Invarianten besitzt. Hieraus ergeben sich die beiden folgenden, zusammen zu beantwortenden Fragen:

I. *Welche Moduln m sind geeignet, um mit ihrer Hilfe Gruppen $\mathfrak{B}$ mit den vorgeschriebenen Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ zu bilden, und zwar so, dass die zu $\mathfrak{B}$ reciproke Gruppe $\mathfrak{A}$ nicht unter die beiden Ausnahmefälle* 1, 2 *fällt?* [1]

[1] Dass für beliebig gegebene Invarianten immer solche Moduln existieren, ist in der

II. *Wie findet man diese Gruppen für einen gegebenen dazu geeigneten Modul?*

§ 6. *Bedingungen für den Modul m.*

Es ist zunächst erforderlich, die Bedingungen, 1, 2 welche die auszuschliessenden Gruppen $\mathfrak{A}$ charakterisieren, auf solche für die Gruppe $\mathfrak{B}$ zu übertragen.

Wir bezeichnen die Indices einer jeden Zahl a in $\mathfrak{A}$ mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

die einer jeden Zahl b in $\mathfrak{B}$ mit

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$$

so dass also die Zahlen b dadurch definiert sind, dass für alle Zahlen a

$$\omega_1^{\alpha_1\beta_1}\omega_2^{\alpha_2\beta_2}\ldots\omega_n^{\alpha_n\beta_n} = 1. \tag{1}$$

Wir haben nun wenn q ein Primfactor von m ist, diejenigen Zahlen a zu betrachten, welche der Bedingung

$$a \equiv 1 \left(\operatorname{mod}\frac{m}{q}\right) \tag{2}$$

genügen, und unterscheiden dabei folgende drei Fälle:

1. Es sei q eine k mal in m aufgehende ungerade Primzahl und $k > 1$. Die Indices aller der Bedingung (2) genügenden Zahlen a sind dann gleich Null mit Ausnahme des zum Modul $q^{k-1}(q-1)$ gehörigen, und dieser letztere kann jeden Wert annehmen, der durch $q^{k-2}(q-1)$ teilbar ist. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ wird also dann und nur dann die sämmtlichen der Bedingung (2) genügende Zahlen a enthalten, *wenn die zum Modul $q^{k-1}(q-1)$ gehörigen Indices β alle durch q teilbar sind.*

2. Ist $q = 2$ so schliesst man ebenso, dass alle der Bedingung (2) genügenden Zahlen a dann und nur dann in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, wenn die zum Modul 2 oder $2^{\lambda-2}$ gehörigen Indices β alle gerade sind, je nachdem $m \equiv 4$ oder $m \equiv 0 \pmod 8$ ist.

---

oben citierten Arbeit von Frobenius und Stickelberger gezeigt. Jedoch ist dort die Frage nicht berührt, wie man *alle* diese Moduln erhält.

Schliessen wir diese Fälle aus, so kann die Kreisteilungsperiode η nicht verschwinden.

3. Ist q ein einfacher Primfactor von m, so sind die der Bedingung (2) genügenden Zahlen a dadurch charakterisiert, dass die Indices derselben alle verschwinden mit Ausnahme des zum Modul $q-1$ gehörigen, welcher jeden beliebigen Wert haben kann. Es tritt also hiernach der zweite Ausnahmefall, nämlich die Reduction auf Einheitswurzeln niedrigerer Ordnung, *dann* und *nur dann* ein, *wenn die zum Modul* $q-1$ *gehörigen Indices* β *alle gleich Null sind.*

Nun ist nach der Definition der Invarianten e_1 die kleinste positive Zahl, welche für alle Elemente b den Bedingungen genügt:

$$(3)\quad e_1\beta_1 \equiv 0 \pmod{m_1}, \qquad e_1\beta_2 \equiv 0 \pmod{m_2}, \quad \ldots, \quad e_1\beta_\mu \equiv 0 \pmod{m_\mu}.$$

Sollen also die beiden Ausnahmefälle ausgeschlossen sein, so ergeben sich nach 1, 2, 3 für den Modul m die folgenden Bedingungen.

Eine ungerade Primzahl q_1 darf nicht öfter in m_1 enthalten sein als in e_1 (weil sonst nach (3) sämmtliche β_1 durch q_1 teilbar wären), also:

A. *Eine in* e_1 *nicht enthaltene ungerade Primzahl kann nur einfach in* m *enthalten sein und eine in* e_1 *enthaltene ungerade Primzahl kann höchstens einmal mehr in* m *als in* e_1 *aufgehen.*

B. *Ist* e_1 *ungerade, so muss auch* m *ungerade sein, und ist* e_1 *durch eine Potenz von 2 teilbar, so kann* m *den Factor 2 höchstens zweimal öfter enthalten als* e_1.

C. *Ist* q *eine einfach in* m *aufgehende Primzahl, so muss* $q-1$ *wenigstens durch eine der in* e_1 *aufgehenden Primzahlen teilbar sein.*

Diese Bedingungen erweisen sich als notwendig. Es wird sich später noch eine weitere Bedingung ergeben, die dann mit diesen zusammen auch hinreichend ist.

§ 7. *Bestimmung der Gruppe* $\mathfrak{B}$.

Wenn eine Gruppe $\mathfrak{B}$ mit den Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ existiert, so giebt es eine Basis von ν Elementen $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ von den Graden $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, so dass jedes Element b in der Form darstellbar ist

$$(1)\qquad b \equiv g_1^{x_1} g_2^{x_2} \ldots g_\nu^{x_\nu} \pmod{m},$$

und jedes nur einmal, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ je ein vollständiges Restsystem mod $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ durchlaufen.

Sind nun

$$\begin{array}{llll} \beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \ldots, \beta_{1,\mu} & \text{die Indices von } g_1, \\ \beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \ldots, \beta_{2,\mu} & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{\nu,1}, \beta_{\nu,2}, \ldots, \beta_{\nu,\mu} & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad g_\nu, \end{array}$$

so erhält man die Indices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ eines beliebigen Elementes b in der Form:

$$(2) \quad \begin{array}{l} \beta_1 \equiv \beta_{1,1}x_1 + \beta_{2,1}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,1}x_\nu \pmod{m_1} \\ \beta_2 \equiv \beta_{1,2}x_1 + \beta_{2,2}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,2}x_\nu \pmod{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_\mu \equiv \beta_{1,\mu}x_1 + \beta_{2,\mu}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,\mu}x_\nu \pmod{m_\mu}. \end{array}$$

Umgekehrt liefert auch jedes System der

$$x_1 \pmod{e_1}, \qquad x_2 \pmod{e_2}, \quad \ldots, \quad x_\nu \pmod{e_\nu}$$

in (2) eingesetzt, die Indices einer und nur einer Zahl b.

Hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf 1, 2, 3 des vorigen Paragraphen die nicht nur *notwendigen* sondern auch *hinreichenden* Bedingungen für die Indices $\beta_{h,k}$ des Basis.

I. *Die $\beta_{h,k}$ müssen so beschaffen sein, dass die Congruenzen*

$$(3) \quad \begin{array}{l} \beta_{1,1}x_1 + \beta_{2,1}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,1}x_\nu \equiv 0 \pmod{m_1} \\ \beta_{1,2}x_1 + \beta_{2,2}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,2}x_\nu \equiv 0 \pmod{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{1,\mu}x_1 + \beta_{2,\mu}x_2 + \ldots + \beta_{\nu,\mu}x_\nu \equiv 0 \pmod{m_\mu} \end{array}$$

die Congruenzen

$$(4) \quad x_1 \equiv 0 \pmod{e_1}, \qquad x_2 \equiv 0 \pmod{e_2}, \quad \ldots, \quad x_\nu \equiv 0 \pmod{e_\nu}$$

zur notwendigen Folge haben.

II. *Ist q ein mehrmals in m aufgehender Primfactor und $m_h = q^{k-1}(q-1)$,*

oder falls $q = 2$ *ist,* $m_h = 2^{\lambda-2}$ *oder* $= 2$, *je nachdem* m *durch* 8 *teilbar ist oder nicht, so dürfen die* ν *Zahlen*

$$(5) \qquad \beta_{1,h},\ \beta_{2,h},\ \ldots,\ \beta_{\nu,h}$$

nicht alle durch q *teilbar sein.*

III. *Soll auch der zweite Ausnahmefall ausgeschlossen sein, so dürfen, wenn* q *ein einfacher Primfactor von* m *und* $m_h = q - 1$ *ist, die Zahlen*

$$\beta_{1,h},\ \beta_{2,h},\ \ldots,\ \beta_{\nu,h}$$

nicht alle durch $q - 1$ *teilbar sein.*

Um die Möglichkeit der Erfüllung dieser Bedingungen beurteilen zu können, bezeichnen wir mit

$$(6) \qquad d_{k,h} \qquad \binom{k=1,2,\ldots,\nu}{h=1,2,\ldots,\mu}$$

den grössten gemeinschaftlichen Teiler von e_k und m_h, so dass, wegen der von den e_k vorausgesetzten Eigenschaft in der Zahlenreihe

$$(7) \qquad d_{1,h},\ d_{2,h},\ \ldots,\ d_{\nu,h}$$

jede Zahl durch die folgende teilbar ist, und setzen ferner

$$(8) \qquad \begin{aligned} e_k &= d_{k,1}e_{k,1} = d_{k,2}e_{k,2} = \ldots = d_{k,\mu}e_{k,\mu}, \\ m_h &= d_{1,h}m_{1,h} = d_{2,h}m_{2,h} = \ldots = d_{\nu,h}m_{\nu,h}, \end{aligned}$$

so dass $e_{k,h}$ und $m_{k,h}$ relative Primzahlen sind, und wegen (7) in der Zahlenreihe

$$(9) \qquad m_{1,h},\ m_{2,h},\ \ldots,\ m_{\nu,h}$$

jede Zahl durch die *vorangegangene* teilbar ist.

Die Zahlen $d_{k,h}$, $e_{k,h}$, $m_{k,h}$ sind durch die Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ und den Modul m allein bestimmt, und wenn m den Bedingungen A, B, C des vorigen Paragraphen genügt, *so ist* $m_{1,h}$ *im Falle* II *nicht durch* q, *im Falle* III *nicht durch* $q - 1$ *teilbar*, wie aus

$$e_1 = d_{1,h}e_{1,h}, \qquad m_h = d_{1,h}m_{1,h}$$

hervorgeht.

Da nun e_k der Grad von g_k ist, und $\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \ldots, \beta_{k,\mu}$ die Indices von g_k, so ist e_k die kleinste positive Zahl, welche den Congruenzen

$$(10) \qquad e_k \beta_{k,h} \equiv 0 \pmod{m_h} \qquad (h=1,2,\ldots,\mu)$$

genügt. Daraus folgt aber mittelst (8)

$$d_{k,h} e_{k,h} \beta_{k,h} \equiv 0 \pmod{d_{k,h} m_{k,h}},$$

und daraus, da $e_{k,h}$ und $m_{k,h}$ relativ prim sind,

$$\beta_{k,h} \equiv 0 \pmod{m_{k,h}}.$$

Wir setzen daher, indem wir unter $\gamma_{k,h}$ neue ganze Zahlen verstehen, die nach dem Modul $d_{k,h}$ zu nehmen sind

$$(11) \qquad \beta_{k,h} = m_{k,h} \gamma_{k,h},$$

und formen damit die Congruenzen (3) um.

Man erhält zunächst durch einsetzen von (8) und (11) in (3):

$$m_{1,h}\gamma_{1,h}x_1 + m_{2,h}\gamma_{2,h}x_2 + \ldots + m_{\nu,h}\gamma_{\nu,h}x_\nu \equiv 0 \pmod{m_{1,h}d_{1,h}}$$

und daraus mittelst der Relationen

$$(12) \qquad \frac{m_{k,h}}{m_{1,h}} = \frac{d_{1,h}}{d_{k,h}} = \frac{e_1}{e_k}\,\frac{e_{k,h}}{e_{1,h}} = \delta_1\delta_2 \ldots \delta_{k-1}\frac{e_{k,h}}{e_{1,h}},$$

worin wie in § 1 (11)

$$(13) \qquad \frac{e_1}{e_2} = \delta_1, \quad \frac{e_2}{e_3} = \delta_2, \quad \ldots, \quad \frac{e_{\nu-1}}{e_\nu} = \delta_{\nu-1}, \quad e_\nu = \delta_\nu, \quad e_1 = \delta_1\delta_2\ldots\delta_\nu$$

gesetzt ist,

$$(14) \qquad e_{1,k}\gamma_{1,k}x_1 + e_{2,k}\gamma_{2,k}\delta_1 x_2 + \ldots + e_{\nu,k}\gamma_{\nu,k}\delta_1\delta_2\ldots\delta_{\nu-1}x_\nu \equiv 0 \pmod{e_1},$$

und die Bedingung I ist nun darauf zurückgeführt, *dass die für $k = 1, 2, \ldots, \mu$ gültigen Congruenzen* (14), *die sich auf einen und denselben Modul beziehen, die Congruenzen* (4) *zur notwendigen Folge haben.*

Bei den weiteren Folgerungen aus dieser Forderung stützen wir uns auf das nachstehende, leicht zu beweisende *Lemma.*

Die nach irgend einem Modul δ genommenen Congruenzen

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,\nu}x_\nu \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \pmod{\delta} \\ a_{\mu,1}x_1 + \ldots + a_{\mu,\nu}x_\nu \equiv 0 \end{array}$$

können befriedigt werden ohne dass sämmtliche $x_1, \ldots, x_\nu$ durch δ teilbar sind, wenn $\nu > \mu$ ist oder wenn zwar $\nu \leqq \mu$ aber alle aus den Reihen der Coefficienten $a_{k,h}$ zu bildenden ν-reihigen Determinanten mit δ einen gemeinschaftlichen Teiler haben, im andern Fall ist dies nicht möglich.[1]

Da nun die Congruenz (14) auch für den Modul e_ν gültig sein und die Folgerung

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad \ldots, \quad x_\nu \equiv 0 \pmod{e_\nu}$$

ergeben muss, so erhalten wir eine vierte Bedingung für den Modul m.

D. *Es muss die Anzahl μ der Indices für den Modul m gleich oder grösser sein als die Anzahl ν der Invarianten.*

Die Congruenzen (14) lassen sich nun successive durch die folgenden ersetzen:

$$(15) \qquad e_{1,k}\gamma_{1,k}x_1 \equiv 0 \pmod{\delta_1},$$

welche die Bedingung ergiebt:

$$(\delta_1) \qquad e_{1,1}\gamma_{1,1},\ e_{1,2}\gamma_{1,2},\ \ldots,\ e_{1,\mu}\gamma_{1,\mu}$$

dürfen keinen gemeinschaftlichen Teiler mit δ_1 haben.

Dann folgt aus (15)

$$(16) \qquad x_1 = \delta_1 x_1',$$

und aus (14)

$$(17) \qquad e_{1,k}\gamma_{1,k}x_1' + e_{2,k}\gamma_{2,k}x_2 \equiv 0 \pmod{\delta_2},$$

[1] Es ist kaum nötig, auf den Beweis dieses Satzes hier einzugehen, der fast wörtlich aus der Theorie der linearen homogenen Gleichungen entnommen werden kann. (Man vgl. z. B. Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis*, Bd. I, Cap. IV.)

woraus die zweite Bedingung:

(δ_2) *Nicht alle aus*

$$\begin{matrix} e_{1,1}\gamma_{1,1}, & e_{1,2}\gamma_{1,2}, & \dots, & e_{1,\mu}\gamma_{1,\mu} \\ e_{2,1}\gamma_{2,1}, & e_{2,2}\gamma_{2,2}, & \dots, & e_{2,\mu}\gamma_{2,\mu} \end{matrix}$$

zu bildenden zweireihigen Determinanten dürfen einen gemeinschaftlichen Teiler mit δ_2 haben.

Dann folgt aus (17)

$$x_1' = \delta_2 x_1'', \qquad x_1 = \delta_1\delta_2 x_1'', \qquad x_2 = \delta_2 x_2''.$$

Indem man diese Schlussweise fortsetzt, gelangt man schliesslich zu der Bedingung

(δ_ν) *Nicht alle aus*

$$\begin{matrix} e_{1,1}\gamma_{1,1}, & e_{1,2}\gamma_{1,2}, & \dots, & e_{1,\mu}\gamma_{1,\mu} \\ e_{2,1}\gamma_{2,1}, & e_{2,2}\gamma_{2,2}, & \dots, & e_{2,\mu}\gamma_{2,\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\nu,1}\gamma_{\nu,1}, & e_{\nu,2}\gamma_{\nu,2}, & \dots, & e_{\nu,\mu}\gamma_{\nu,\mu} \end{matrix}$$

zu bildenden ν-reihigen Determinanten dürfen einen gemeinsamen Teiler mit δ_ν haben.

Wenn nun q eine in $e_1, e_2, \dots, e_\rho$ aber nicht in $e_{\rho+1}, \dots, e_\nu$ aufgehende Primzahl, also ein Teiler von δ_ρ nicht aber von $\delta_{\rho+1}, \delta_{\rho+2}, \dots, \delta_\nu$ ist, so fordert die Bedingung (δ_ρ), dass man über die $\gamma_{k,h}$ so verfüge, dass wenigstens eine der ρ-reihigen Determinanten, etwa

$$\begin{vmatrix} e_{1,1}\gamma_{1,1}, & e_{1,2}\gamma_{1,2}, & \dots, & e_{1,\rho}\gamma_{1,\rho} \\ e_{2,1}\gamma_{2,1}, & e_{2,2}\gamma_{2,2}, & \dots, & e_{2,\rho}\gamma_{2,\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\rho,1}\gamma_{\rho,1}, & e_{\rho,2}\gamma_{\rho,2}, & \dots, & e_{\rho,\rho}\gamma_{\rho,\rho} \end{vmatrix} \qquad (\Delta)$$

nicht durch q teilbar sei, und wenn dieser Forderung für alle in e_1 aufgehende Primzahlen q genügt ist, so sind auch die Bedingungen (δ_1), (δ_2), ..., (δ_ν) erfüllt.

Hieraus ergiebt sich die letzte Bedingung für den Modul m:

E. *Ist q eine in $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$ aber nicht in $e_{\rho+1}$ aufgehende Primzahl, so muss eine Anordnung der $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ derart möglich sein, dass das Product*

$$e_{1,1} e_{2,2} \ldots e$$

nicht durch q teilbar ist. (Selbstverständlich braucht diese Anordnung für die verschiedenen Primzahlen q nicht dieselbe zu sein.)

Ist die Bedingung E erfüllt, so kann man über die $\gamma_{k,h}$ so verfügen, dass auch die Bedingung (Δ) befriedigt ist; man hat nur z. B.

$$\gamma_{1,1}, \gamma_{2,2}, \ldots, \gamma_{\rho,\rho} \quad \text{durch } q \text{ nicht teilbar}$$

$$\gamma_{2,1}, \gamma_{3,1}, \gamma_{3,2}, \ldots, \gamma_{\rho,1}, \gamma_{\rho,2}, \ldots, \gamma_{\rho,\rho-1} \quad \text{durch } q \text{ teilbar}$$

anzunehmen, und da hiernach an $\gamma_{1,h}$ noch keine Anforderung gestellt ist, so bleibt noch die Möglichkeit, den Bedingungen II, III zu genügen. Denn nach (11) geschieht diesen Forderungen genüge, wenn ein bestimmtes $m_{1,h}\gamma_{1,h}$, nicht durch q oder nicht durch $q-1$ teilbar ist, während $m_{1,h}$ durch q oder $q-1$ nicht teilbar ist.

Auch für die verschiedenen in Betracht kommenden Primzahlen q sind diese Forderungen offenbar mit einander verträglich.

§ 8. *Bestimmung der Gruppe $\mathfrak{A}$.*

Die Coefficienten $\gamma_{k,h}$ lassen sich den Bedingungen des vorigen Paragraphen gemäss im Allgemeinen auf mehrfache Weise bestimmen. Unter diesen Bestimmungsarten können mehrere zu derselben Gruppe $\mathfrak{B}$ führen; es können aber auch verschiedene Gruppen $\mathfrak{B}$ und folglich auch verschiedene Gruppen $\mathfrak{A}$ auftreten. Man muss also, um alle diese Gruppen zu bilden, die verschiedenen Bestimmungsweisen der Coefficienten $\gamma_{k,h}$ in Betracht ziehen. Man kann aber dann, wenn man die $\gamma_{k,h}$ gewählt hat, ohne erst auf die Gruppe $\mathfrak{B}$ einzugehen, direct zur Bildung der Gruppe $\mathfrak{A}$ schreiten, wie jetzt noch gezeigt werden soll.

Sind wie oben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ die Indices irgend einer Zahl in $\mathfrak{A}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ die einer Zahl in $\mathfrak{B}$, ist ferner

$$M = m_1 m_1' = m_2 m_2' = \ldots = m_\mu m_\mu' \tag{1}$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$ so sind die beiden Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dadurch charakterisiert, dass stets

$$(2) \qquad m'_1\beta_1\alpha_1 + m'_2\beta_2\alpha_2 + \ldots + m'_\mu\beta_\mu\alpha_\mu \equiv 0 \pmod{M}$$

oder dass die sämmtlichen

$$(3) \qquad \frac{\beta_1\alpha_1}{m_1} + \frac{\beta_2\alpha_2}{m_2} + \ldots + \frac{\beta_\mu\alpha_\mu}{m_\mu}$$

ganze Zahlen sind. Nach § 7 (2) hat man also alle diejenigen Zahlensysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu \pmod{m_1, m_2, \ldots, m_\mu}$ aufzusuchen, für welche

$$(4) \qquad \frac{\beta_{k,1}\alpha_1}{m_1} + \frac{\beta_{k,2}\alpha_2}{m_2} + \ldots + \frac{\beta_{k,\mu}\alpha_\mu}{m_\mu} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\nu)}$$

ganze Zahlen sind. Die Ausdrücke (4) lassen sich aber nach (8), (11) § 7 so darstellen

$$(5) \qquad \frac{\gamma_{k,1}\alpha_1}{d_{k,1}} + \frac{\gamma_{k,2}\alpha_2}{d_{k,2}} + \ldots + \frac{\gamma_{k,\mu}\alpha_\mu}{d_{k,\mu}},$$

so dass man die einzelnen Terme auf den gemeinschaftlichen Nenner e_k bringen kann. Hiernach ergeben sich dann zur directen Bestimmung der Indices α_h die Congruenzen

$$(6) \qquad e_{k,1}\gamma_{k,1}\alpha_1 + e_{k,2}\gamma_{k,2}\alpha_2 + \ldots + e_{k,\mu}\gamma_{k,\mu}\alpha_\mu \equiv 0 \pmod{e_k}. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\nu)}$$

§ 9. *Besondere Fälle.*

Es hat nicht die geringste Schwierigkeit, nach den bisher gegebenen Vorschriften Zahlenbeispiele in beliebiger Menge durchzuführen. Wir überlassen dies dem Leser und heben hier nur noch zwei Fälle allgemeinerer Art hervor, in welchen den Resultaten eine einfachere Gestalt gegeben werden kann.

1. *Es sei $\nu = 1$, also die Gruppe $\mathfrak{B}$ regulär*

$$m = 2^\lambda q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots$$

Es ist in diesem Fall nach § 7 (8)

$$e_1 = d_{1,1}e_{1,1} = d_{1,2}e_{1,2} = \ldots = d_{1,\mu}e_{1,\mu}$$

$$m_1 = d_{1,1}m_{1,1}, \qquad m_2 = d_{1,2}m_{1,2}, \quad \ldots, \quad m_\mu = d_{1,\mu}m_{1,\mu}.$$

und die Bedingung E reduciert sich darauf, dass

$$e_{1,1},\ e_{1,2},\ \ldots,\ e_{1,\mu}$$

keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. Die Zahlen $\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \ldots, \gamma_{1,\mu}$ hat man dann so zu wählen, dass auch

$$e_{1,1}\gamma_{1,1},\ e_{1,2}\gamma_{1,2},\ \ldots,\ e_{1,\mu}\gamma_{1,\mu}$$

keinen gemeinschaftlichen Teiler mit e_1 haben, und überdiess zur Vermeidung der Ausnahmefälle, so dass, wenn q Primfactor von m ist und m_1 der zugehörige Indexmodul, $e_{1,1}\gamma_{1,1}$ nicht durch $q - 1$ oder nicht durch q] teilbar ist, je nachdem q einmal oder mehrmals in m aufgeht, eine Forderung, welcher wegen der Voraussetzungen A, B, C stets genügt werden kann. Für die Indices α erhält man dann die eine Bedingung

$$(1) \qquad e_{1,1}\gamma_{1,1}\alpha_1 + e_{1,2}\gamma_{1,2}\alpha_2 + \ldots + e_{1,\mu}\gamma_{1,\mu}\alpha_\mu \equiv 0 \pmod{e_1}.$$

Dies ist der von KRONECKER in der oben erwähnten Abhandlung behandelte Fall.

2. Es sei ν beliebig, dagegen

$$(2) \qquad e_1 = e_2 = \ldots = e_\nu = p$$

gleich einer und derselben Primzahl (einschliesslich der Primzahl 2). Alle von p verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen müssen in diesem Falle $\equiv 1 \pmod p$ sein und können nur einfache Factoren von m sein. Der Factor p selbst kann zweimal und wenn $p = 2$ ist, dreimal in m enthalten sein, aber nicht nur einmal (wegen C).

Wir nehmen zuerst an, es sei:

$$m = q_1 q_2 \cdots q_\mu$$

$$q_1 \equiv 1, \qquad q_2 \equiv 1, \quad \ldots, \quad q_\mu \equiv 1 \pmod p, \qquad \mu \geqq \nu$$

$$m_1 = q_1 - 1, \qquad m_2 = q_2 - 1, \quad \ldots, \quad m_\mu = q_\mu - 1.$$

Dann ist

$$d_{k,h} = p, \qquad e_{k,h} = 1, \qquad m_{k,h} = \frac{q_h - 1}{p}.$$

Die Zahlen $\gamma_{k,h}$ hat man so anzunehmen, dass nicht alle ν-reihigen Determinanten aus

$$\begin{array}{l}\gamma_{1,1},\ \gamma_{1,2},\ \ldots,\ \gamma_{1,\mu}\\ \gamma_{2,1},\ \gamma_{2,2},\ \ldots,\ \gamma_{2,\mu}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{\nu,1},\ \gamma_{\nu,2},\ \ldots,\ \gamma_{\nu,\mu}\end{array}$$

durch p teilbar sind, und dann erhält man die Gruppe $\mathfrak{A}$, indem man alle Zahlen α aufsucht welche den Congruenzen

(3) $$\left.\begin{array}{l}\gamma_{1,1}\alpha_1 + \gamma_{1,2}\alpha_2 + \ldots + \gamma_{1,\mu}\alpha_\mu \equiv 0\\ \gamma_{2,1}\alpha_1 + \gamma_{2,2}\alpha_2 + \ldots + \gamma_{2,\mu}\alpha_\mu \equiv 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{\nu,1}\alpha_1 + \gamma_{\nu,2}\alpha_2 + \ldots + \gamma_{\nu,\mu}\alpha_\mu \equiv 0\end{array}\right\} \pmod p$$

genügen. Durch diese Congruenzen sind ν von den Zahlen α_h durch die übrigen $\mu - \nu$, welche willkürlich sind, nach dem Modul p bestimmt. Nun kann jede Zahl α_h, ohne die Bedingungen (3) zu verletzen, ersetzt werden durch

(4) $$\alpha_h + s_h p, \qquad s_h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{q_h - 1}{p} - 1.$$

Bezeichnen wir also mit c_1, c_2, ... primitive Wurzeln von q_1, q_2, ... so ist

$$\begin{array}{l}a \equiv c_1^{\alpha_1} \pmod{q_1}\\ a \equiv c_2^{\alpha_2} \pmod{q_2}\\ \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

und daher, wenn r_1, r_2, ... primitive Einheitswurzeln der Ordnung q_1, q_2, ... bedeuten

$$r^a = r_1^{c_1^{\alpha_1}} r_2^{c_2^{\alpha_2}} \ldots$$

und also, nach (4)

(5) $$\eta = \sum^{\alpha}\sum^{s_k} r_1^{c_1^{\alpha_1 + s_1 p}} r_2^{c_2^{\alpha_2 + s_2 p}} \ldots$$

worin die mit α bezeichnete Summe auf alle den Congruenzen (3) genügenden Zahlen α_h, die kleiner als q und nicht negativ sind, erstreckt ist.

Setzen wir also

(6) $$\eta^{(k)}_{\alpha_h} = \sum_{s = 0,1,\ldots,\frac{q_h-1}{p}-1} r_k^{c_k^{\alpha_h + sp}}$$

was nichts anderes als die von Gauss eingeführten $q_h - 1 : p$-gliedrigen Perioden sind, so erhält (5) die Form

(7) $$\eta = \sum^{\alpha} \eta_{\alpha_1}^{(1)} \eta_{\alpha_2}^{(2)} \ldots$$

worin die Summe nach α ebenso zu erklären ist wie in (5).

Ist insbesondere $\mu = \nu$, so werden die in (7) vorkommenden α alle $= 0$ und man erhält η dargestellt als ein Product von ν einfachen Gauss'schen Perioden.

Nicht viel anders gestaltet sich das Resultat, wenn wir

(8) $$m = p^2 q_1 q_2 \ldots$$

setzen. Wir nehmen eine primitive Wurzel c_0 von p^2 und definieren α_0 nach dem Modul $p(p-1)$ durch die Congruenz

$$a \equiv c_0^{\alpha_0} \pmod{p^2}.$$

Ist dann r_0 eine primitive Einheitswurzel der Ordnung p^2, und $\eta_{\alpha_0}^{(0)}$ die $(p-1)$-gliedrige Periode

$$\eta_{\alpha_0}^{(0)} = \sum_{0,\, p-2}^{s} r_0^{c_0^{\alpha_0 + sp}}$$

so wird jetzt

(9) $$\eta = \sum^{\alpha} \eta_{\alpha_0}^{(0)} \eta_{\alpha_1}^{(1)} \eta_{\alpha_2}^{(2)} \ldots$$

worin die Summe nach α über alle den Congruenzen

(10) $$\gamma_{h,0}\alpha_0 + \gamma_{h,1}\alpha_1 + \gamma_{h,2}\alpha_2 + \ldots \equiv 0 \pmod{p} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu)$$

genügenden Werte α erstreckt ist, die kleiner als p und nicht negativ sind.

Ist endlich $p = 2$ und

$$m = 8 q_1 q_2 \ldots$$

so bestimmt man α_0, α'_0 nach dem Modul 2 aus der Congruenz

(11) $$(-1)^{\alpha_0} 5^{\alpha'_0} \equiv a \pmod{8}$$

und erhält für η den Ausdruck

(12) $$\eta = \sum^{\alpha} e^{\frac{\pi i}{4}(-1)^{\alpha_0} 5^{\alpha'_0}} \eta_{\alpha_1}^{(1)} \eta_{\alpha_2}^{(2)} \ldots$$

worin wieder die nach α genommene Summe über alle den Congruenzen

(13) $$\gamma_{h,0}\alpha_0 + \gamma'_{h,0}\alpha'_0 + \gamma_{h,1}\alpha_1 + \gamma_{h,2}\alpha_2 + \ldots \equiv 0 \pmod{2}$$

genügenden Werte α, die gleich 0 oder 1 gesetzt werden können, erstreckt ist.

Marburg, im October 1886.

KALENDER-FORMELN

VON

CHR. ZELLER
in MARKGRÖNINGEN.

I. *Wochentags-Rechnung.*

1. **Regel.**

J sei die Zahl des Jahrhunderts,

K die Jahrszahl innerhalb desselben,

m die Zahl des Monats,

q die Zahl des Monatstags,

h die Zahl des Wochentags;

Bruchreste bleiben weg; Januar und Februar werden als 13. u. 14. Monat des vorhergehenden Jahres betrachtet —:

dann ist h gleich dem Reste, welcher bleibt

A) im julianischen Kalender, wenn die Summe

$$q + \frac{(m + 1)26}{10} + K + \frac{K}{4} + 5 - J$$

B) im gregorianischen Kalender, wenn die Summe

$$q + \frac{(m + 1)26}{10} + K + \frac{K}{4} + \frac{J}{4} - 2J$$

durch 7 dividiert wird.

Die Rechnung wird vereinfacht, wenn man schon beim Summieren Mehrfache von 7 weglässt oder nur die Siebener-Reste addiert.

2. **Beispiel.**

A) *An welchem Wochentage landete Columbus 12 Okt. 1492?*

$$q = 12, \qquad m = 10, \qquad K = 92, \qquad J = 14$$

$$12 + \frac{(10+1)26}{10} + 92 + 23 + 5 - 14 = 12 + 28 + 92 + 23 + 5 - 14$$

$$= 5 + 0 + 1 + 2 + 5 = 13 = 1.7 + 6$$

$h = 6$; also am sechsten Wochentag oder Freitag.

B) *1712, 24 Jan. Geburtstag Friedr. II.*

$$q = 24, \qquad m = 13, \qquad K = 11, \qquad J = 17$$

$$24 + \frac{(13+1)26}{10} + 11 + \frac{11}{4} + \frac{17}{4} - 2.17 = 24 + 36 + 11 + 2 + 4 - 34$$

$$= 43 = 6.7 + 1$$

$h = 1$; also war Friedr. II geboren am 1. Wochentag oder Sonntag.

3. **Erläuterung.**

Von den Werten der obigen Summe ändert sich q mit jedem Tage, m mit jedem Monat, K mit jedem Jahr, $\frac{K}{4}$ mit jedem Schaltjahr, J mit jedem einzelnen, $\frac{J}{4}$ je mit dem vierten Jahrhundert. Von hieraus erhellt, dass die Formel für alle Fälle richtig bleibt, wenn sie es, wovon ein beliebiges Beispiel überzeugt, für irgend einen ist, sofern sie sich genau den Veränderungen anpasst, welche der Lauf des Kalenders mit sich bringt, auch wo diese unregelmässig und sprungsweise geschehen. Am meisten Unregelmässigkeit z. B. bieten die Monatslängen; aber der Ausdruck $\frac{(m+1)26}{10}$ wird den Schwankungen derselben gerecht; dieser Wert wächst mit jedem Monat um 2.6, was bald eine Zunahme von 2 bald von 3 Ganzen bewirken kann und in Wirklichkeit gerade für diejenigen Monate, welche 31 Tage oder 4 Wochen 3 Tage haben drei, für die Monate mit 30 Tagen zwei Ganze ausmacht. Durch diesen Ausdruck ist es möglich geworden, alle in Betracht kommende Zahlen in eine Formel zu vereinigen, ohne Hilfs-Tafeln oder -Zahlen anzuwenden.

II. *Oster-Rechnung.*

1. **Regel.**

A) *Für den julianischen Kalender.*

1) Dividiere die Jahrszahl $(100J + K)$ oder was denselben Rest giebt $(5J + K)$ durch 19, Rest a;

2) $(19a + 15)$ dividiere mit 30, Rest b;
b ist die *Ostervollmondszahl* und giebt an, wie viele Tage nach dem 21 März der Ostervollmond ist;

3) zu b addiere $\left(K + \frac{K}{4} - J\right)$, dividiere mit 7, Rest d;
dann ist Ostern $(b + 7 - d)$ Tage nach dem 21 März, $(7 - d)$ Tage nach dem Ostervollmond.

B) *Für den gregorianischen Kalender.*

1) $(5J + K)$ dividiere mit 19, Rest a;

2) zu $(19a + 15)$ addiere die Zahl $g = J - \frac{J}{4} - \frac{J}{3}$;
$19a + 15 + J - \frac{J}{4} - \frac{J}{3}$ dividiere mit 30, Rest b, *die Ostervollmondszahl;*

3) zu b addiere $K + \frac{K}{4} + \frac{J}{4} + 2 - 2J$, dividiere mit 7, Rest d;
dann ist Ostern $(b + 7 - d)$ Tage nach dem 21 März.

Zusatz 1. Der Wert von g in 2) bleibt sich oft mehrere Jahrhunderte gleich und beträgt 7, 8, 9 für die Jahre 1583—1700, 1700—1900, 1900—2200. Die dafür gegebne Formel ist richtig bis zum Jahr 4200; für Jahre, welche darüber hinausliegen, ist anstatt $\frac{J}{3}$ genauer $\frac{8J + 13}{25}$ zu setzen. So geändert gilt die Formel dann ganz allgemein für alle Jahrhunderte des gregorianischen Kalenders.

Zusatz 2. Wenn bei 3) die Division mit 7 aufgeht, so ist $d = 0$ zu setzen, ausgenommen beim gregorianischen Kalender in zwei Fällen: 1) wenn $d = 0$ und $b = 29$; 2) wenn $d = 0$, $b = 28$, $a > 10$; dann ist $d = 7$ zu nehmen; oder was dasselbe ist: wenn die Rechnung für $d = 0$, $b = 29$ als Osterdatum den 26 April ergiebt, so ist dafür der 19 April zu setzen, und der 18 anstatt 25 April, wenn $b = 28$, $a > 10$, $d = 0$ gefunden wird.

Übrigens lässt sich diese Ausnahme auch in die Formel selbst einführen, wie HERM. KINKELIN von Basel zeigt in der gründlichen und instruktiven Abhandlung über *Berechnung des christlichen Osterfests,* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XV, 1870, S. 217—228.

Macht man nämlich $f = \dfrac{b + \frac{a}{11}}{29}$ so wird da b nie grösser als 29, a nie grösser als 18, der Wert f immer der Null gleich, ausser in jenen beiden Ausnahmefällen $b = 29$ oder $b = 28$ und $a > 10$, wo man $f = 1$ erhält. Fügt man nun dem Ausdruck für das Osterdatum noch $-7f$ bei, so schliesst derselbe auch jene Ausnahmefälle ein.

2. **Beispiel.**

A) *Rafael starb 2 Tage vor Ostern 1520, an welchem Monatstage?*

$$J = 15, \qquad K = 20, \qquad K + 5J = 95 = 5 \cdot 19 + 0, \qquad a = 0$$

$$19a + 15 = 15, \qquad b = 15$$

$$15 + 20 + \frac{20}{4} - 15 - 25 = 7 \cdot 3 + 4, \qquad d = 4$$

Ostern $15 + 7 - 4 = 18$ Tage nach dem 21 März, am 39 März oder 8 April. Rafael starb am Carfreitag 6 April.

B) *Ostern 1886.*

$$J = 18, \qquad K = 86, \qquad \frac{K}{4} = 21$$

$$86 + 5 . 18 = 176 = 19 . 9 + 5, \qquad a = 5$$

$$19 . 5 + 15 + 18 - \frac{18}{4} - \frac{18}{3} = 118 = 30 . 3 + 28, \qquad b = 28$$

$$28 + 86 + \frac{86}{4} + \frac{18}{4} + 2 - 2 . 18 = 141 - 36 = 105 = 7 . 15 + 0,$$

$$d = 0 \quad (\text{weil } a < 10)$$

Ostern $(28 + 7 - 0) = 35$ Tage nach dem 21 März, am 56 März oder 25 April.

3. **Erläuterung.**

Die bei der Division mit 19 in 1) als Rest gefundene Zahl a ist gleich der um 1 verminderten goldnen Zahl, woran die Stelle des betr. Jahrs in der 19-jährigen Mondsperiode erkannt wird. a wächst mit jedem Jahr um 1 und kann alle Werte von 0 bis 18 annehmen.

Der Ostervollmond ist je im nächsten Jahr entweder um 11 Tage früher oder um $30 - 11 = 19$ Tage später; nach eben demselben Gesetze geschieht auch der Fortschritt oder Rückgang bei dem Reste der Division von $(19a + 15)$ durch 30, und so überzeugt man sich auch hier, dass die Formel, wenn sie für die Ostervollmondszahl einmal ein richtiges Resultat giebt, immer ein solches geben muss, denn die Werte von b schreiten ja ganz dem Mondlauf entsprechend vorwärts oder zurück.

Übrigens liesse sich die Richtigkeit des Verfahrens auch aus den allbekannten Anweisungen zur cyklischen Berechnung der Mondsphasen mittelst der goldnen Zahl darthun.

Bei dem gregorianischen Kalender muss in 2) dem Ausdruck $(19a + 15)$ noch die Zahl g hinzugefügt werden. In diesem Kalender ist nämlich wegen der ausgeworfenen Säcular-Schalttage das Datum um $\left(J - \frac{J}{4} - 2\right)$ Tage vorgerückt, oder $\left(J - \frac{J}{4} - 2\right)$ ist die Summe der unter dem Namen Sonnengleichung, *æquatio solaris*, ausgefallenen Tage; zugleich aber wird durch die sog. Mondsgleichung (*æquatio lunaris*) jede Mondsphase in 300 Jahren um 1 Tag, genauer in 2500 Jahren um 8 Tage rückwärts verschoben; die Summe dieser als Mondsgleichung zu subtrahierenden Tage beträgt $\left(\frac{J}{3} - 2\right)$ oder genauer $\left(\frac{8J + 13}{25} - 2\right)$ welche im entgegengesetzten Sinn von der Sonnengleichung zu rechnen sind, so dass dann der Gesammtwert, um welchen sich gegen dem julianischen Kalender der Vollmondstag verschiebt

$$\left(J - \frac{J}{4} - 2\right) - \left(\frac{J}{3} - 2\right) = \left(J - \frac{J}{4} - \frac{J}{3}\right) = g \text{ Tage beträgt.}$$

Diese muss man dem julianischen Ostervollmondsdatum zuzählen, wie oben geschehen ist.

Ist der Ostervollmondstag gefunden, so muss noch sein Wochentag und wie viele Tage von da bis zum nächsten Sonntag sind, bestimmt werden. Es geschieht ganz nach der obigen Wochentags-Rechnung. $(d + 1)$ ist die Wochentagszahl des Ostervollmonds und von da bis zum nächsten Sonntage oder 8 Wochentage sind $8 - (d + 1)$ oder $(7 - d)$ Tage, wie oben gesagt ist.

Schliesslich möge noch beigefügt werden, dass die obigen Formeln,

doch mit kleiner Abweichung und ohne die Erläuterungen, in lateinischer Sprache mitgeteilt worden sind in dem Bulletin de la société mathématique de France 1883, S. 59, sowie neuerdings in den von O. Böklen in Reutlingen herausgegebnen Mathemat.-naturwissenschaftl. Mitteilungen, H. 2, S. 54. Tübingen 1885.

Nachtrag.

Anstatt J und K kann man auch die Jahrszahl N selbst einführen und hat $J = \frac{N}{100}$ etc. Für $K + \frac{K}{4}$ kann man $N + \frac{N}{4} + \frac{N}{100}$ setzen, für g den Ausdruck $\frac{N}{100} - \frac{N}{300} - \frac{N}{400}$ etc.

Jetzt hat man nur *die drei Regeln*

I) für den *Wochentag:*

julianisch: $g + 2m + \frac{3m+3}{5} + N + \frac{N}{4}$

gregorian.: $g + 2m + \frac{3m+3}{5} + N + \frac{N}{4} - \left(\frac{N}{100} - \frac{N}{400} - 2\right)$

dividiere mit 7, Rest h, die *Wochentagszahl;*

II) für den *Vollmond:*

julianisch: $19N - \frac{N}{19} + 15$

gregorian.: $19N - \frac{N}{19} + 15 + \left(\frac{N}{100} - \frac{N}{300} - \frac{N}{400}\right)$

dividiere mit 30, Rest b, die *Ostervollmondszahl;*

wobei zur Berechnung nur die Jahrszahl N verwendet wird;

III) für das *Osterfest:*

julianisch: $b + N + \frac{N}{4}$

gregorian.: $b + N + \frac{N}{4} - \left(\frac{N}{100} - \frac{N}{400} - 2\right)$

dividiere mit 7, Rest d;

dann ist Ostern $(b + 7 - d)$ Tage nach dem 21 März.

Man hat etwas grössere Zahlen in der Rechnung, aber mehr Übersichtlichkeit und ausser b und d keine Hilfszahl. — Die Ausdrücke in den Klammern repräsentiren bei I) und II) den Betrag der Sonnengleichung, bei II) den oben mit g bezeichneten kombinierten Betrag der Sonnen- und Mondsgleichung.

ÜBER EINEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GEWISSEN LINEAREN DIFFERENTIAL- UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

1. In meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction*, Bd. 8 dieses Journals S. 37—80, habe ich gewisse mit der Gammafunction sehr nahe verwandte Transcendenten untersucht. Es wurde behauptet, dass die formale Übereinstimmung, welche die Theorie dieser Functionen mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen in gewissen Hinsichten erhält, dadurch erklärt werden kann, dass in der That auch ein bestimmter Zusammenhang zwischen diesen Functionen und den Integralen gewisser linearen Differentialgleichungen stattfindet. Am Ende der Arbeit wurde ein specieller, diesen Zusammenhang angebender Satz ausgesprochen. Es wurde zugleich behauptet, dass dieser Satz nur ein Specialfall von allgemeineren auf Differentialgleichungen der Form

$$(1)\quad (a_0 - b_0x)x^n y^{(n)} + (a_1 - b_1x)x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + (a_n - b_nx)y = 0$$

sich beziehenden Sätzen sei. Die Differentialgleichung (1) wurde bei jener Gelegenheit in der Gestalt

$$x^{\alpha}\frac{d}{dx}x^{\alpha_1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}x^{\alpha_n}y = cx^{\beta}\frac{d}{dx}x^{\beta_1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}x^{\beta_m}y,$$

auf die sie immer gebracht werden kann, geschrieben.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, die Richtigkeit der oben erwähnten Behauptungen nachzuweisen.

Obgleich es nicht immer nothwendig ist, stellen wir uns dennoch vor, dass die bestimmten Integrale, von denen im Folgenden die Rede sein wird, längs einer die Grenzen verbindenden Geraden erstreckt sind. Liegt eine singuläre Stelle zwischen den Grenzen, so kann sie mit Hülfe eines unendlich kleinen Halbkreises vermieden werden.

Ist a_0 von Null verschieden, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, so haben die Integrale der Differentialgleichung (1) bekanntlich die Eigenschaft, mit einer passenden Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben, und können in dieser Umgebung durch eine Summe von Reihen der Form

$$x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} [c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} \log x + \ldots + c_{k-1}^{(\nu)} (\log x)^{k-1}] x^\nu,$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ der Differentialgleichung (1) gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Bezeichnet also $\varphi(x)$ ein Integral dieser Differentialgleichung, so hat das bestimmte Integral

$$(2) \qquad I(z) = \int_0^1 \varphi(x) x^{z-1} dx,$$

für hinreichend grosse Werthe des reellen Theiles von z, sicher einen endlichen Werth, wenn der singuläre Punkt

$$x = \frac{a_0}{b_0} = a$$

der Differentialgleichung (1) von 1 verschieden ist. Den Fall wo $a = 1$ ist, wollen wir später für sich betrachten. Der Kürze halber wird daher im Folgenden, wenn das entgegengesetzte nicht gesagt wird, angenommen, dass $x = 1$ eine reguläre Stelle unserer Differentialgleichung ist. Bezeichnet man also die entgegengesetzten Werthe der Wurzeln der genannten Fundamentalgleichung mit

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

und den grössten unter den reellen Theilen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit λ, so

hat das bestimmte Integral (2) immer einen endlichen Werth, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist.

Durch das bestimmte Integral (2) wird nun eine Function definirt, welche die folgende lineare Differenzengleichung erster Ordnung befriedigt

$$(3) \qquad \mathbf{r}_1(z)f(z+1) = \mathbf{r}_0(z)f(z) - R(z),$$

wo $\mathbf{r}_0(z)$, $\mathbf{r}_1(z)$, $R(z)$ ganze rationale Functionen bezeichnen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich folgendermassen. Durch Multiplication mit x^{z-1} und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 folgt zunächst aus (1):

$$(4) \qquad \int_0^1 x^{z-1}(a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y)dx$$

$$= \int_0^1 x^z (b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_n y)dx.$$

Das Verfahren der theilweisen Integration liefert ferner die Gleichung

$$(5) \qquad \int_0^1 y^{(\nu)} x^z dx = y_1^{(\nu-1)} - y_1^{(\nu-2)} z + y_1^{(\nu-3)} z(z-1) + \ldots$$

$$+ (-1)^\nu z(z-1)\ldots(z-\nu+1)\int_0^1 y x^{z-\nu} dx,$$

wo $y_1^{(\nu)}$ den Werth von $y^{(\nu)}$ für $x = 1$ bezeichnet. Aus Gleichung (4) erhellt nun, indem man auf beiden Seiten gliedweise integrirt und jedes Glied mit Hülfe von (5) transformirt, dass man auf der linken Seite ganze rationale Functionen und ausserdem das Integral

$$\int_0^1 y x^{z-1} dx = f(z)$$

und gleichfalls auf der rechten Seite ganze rationale Functionen und ausserdem das Integral

$$\int_0^1 y x^z dx = f(z+1)$$

bekommen wird. Die so erhaltene Gleichung kann nun offenbar auf die Form (3) gebracht werden.

Die ganzen Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind durch folgende Gleichungen bestimmt

$$(6)\quad \mathbf{r}_0(z) = a_n - a_{n-1}z + a_{n-2}z(z+1) + \ldots + (-1)^n a_0 z(z+1)\ldots(z+n-1)$$

$$(7)\quad \mathbf{r}_1(z) = b_n - b_{n-1}(z+1) + b_{n-2}(z+1)(z+2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n b_0(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$$

$R(z)$ ist höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Die beiden Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind von dem Integrale $\varphi(x)$ unabhängig. Die Coefficienten in $R(z)$ aber sind homogene lineare Functionen von $\varphi(1), \varphi'(1), \ldots, \varphi^{(n-1)}(1)$. Es ist offenbar

$$\mathbf{r}_0(-z) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z(z-1) + \ldots + a_0 z(z-1)\ldots(z-n+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = 0$, und

$$\mathbf{r}_1(z-1) = b_n - b_{n-1}z + b_{n-2}z(z+1) + \ldots + (-1)^n b_0 z(z+1)\ldots(z+n-1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = \infty$ der Differentialgleichung (1) gehörige Fundamentalgleichung.

2. Das oben betrachtete Integral $f(z)$ kann in manchen Fällen durch einen einfachen analytischen Ausdruck dargestellt werden. Wir wollen, um dies zu zeigen, annehmen, es sei entweder $|a_0| > |b_0| \geq 0$ oder $|a_0| = |b_0| > 0$ (nicht aber $a_0 = b_0$), und im letzten Falle der reelle Theil von

$$\varkappa = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} - n$$

in algebraischem Sinne grösser als -1.

Setzt man

$$\frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{r}(z), \qquad \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so folgt mit Hülfe von (4) die Gleichung

$$(8)\qquad f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z) - \mathbf{R}(z).$$

durch deren wiederholte Anwendung sich die folgende ergiebt

$$(9)\qquad f(z) = \frac{\mathbf{R}(z)}{\mathbf{r}(z)} + \frac{\mathbf{R}(z+1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{\mathbf{R}(z+m-1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} + \frac{f(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)}.$$

Unter den obigen Voraussetzungen kann nun gezeigt werden, dass das Restglied in (9) stets die Null zur Grenze hat. Dies ist, wenn $|a_0| > |b_0|$ ist, unmittelbar ersichtlich; denn das Product

$$\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)$$

wird alsdann mit wachsendem m unendlich, während $f(z+m)$, da in (2) die Veränderliche x auf das Intervall $0\dots 1$ beschränkt ist, sich der Grenze Null nähert. Ist $|a_0| = |b_0|$, so setzen wir $\frac{a_0}{b_0} = a$ und bezeichnen die Wurzeln der Gleichungen

$$\mathbf{r}_0(z) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1(z) = 0$$

beziehungsweise mit

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

und

$$z'_1, z'_2, \dots, z'_n.$$

Dann ist

$$\varkappa = z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n - z_1 - z_2 - \dots - z_n.$$

Bringt man das Restglied in (9) auf die Form

$$\frac{f(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = \frac{a^m m^\varkappa}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} \cdot \frac{f(z+m)}{a^m m^\varkappa},$$

so geht aus § 2 meiner oben citirten Arbeit hervor, dass der erste Factor rechter Hand für wachsendes m sich der endlichen Grenze

$$\lim_{m=\infty} \frac{a^m m^\varkappa}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\dots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z'_1)\Gamma(z-z'_2)\dots\Gamma(z-z'_n)}$$

nähert. Da der reelle Theil von z grösser als λ vorausgesetzt wird, wo

λ die in § 1 bestimmte Zahl bedeutet, so giebt es offenbar eine positive Constante A, welche die Bedingung

$$|yx^z| < A$$

erfüllt, wenn x auf das Intervall $0 \ldots 1$ beschränkt ist. In Folge eines bekannten Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale ist daher

$$|f(z+m)| < \int_0^1 |yx^z| x^{m-1} dx < A \int_0^1 x^{m-1} = \frac{A}{m}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\left|\frac{f(z+m)}{a^m m^\chi}\right| < \left|\frac{A}{m^{\chi+1}}\right|.$$

Da unserer Annahme nach der reelle Theil von $\chi > -1$ ist, so erhellt hieraus, dass das Restglied in (9) für wachsendes m sich der Grenze Null nähert.

Hiermit ist nun unter den oben erwähnten Voraussetzungen dargethan, nicht nur dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

wenigstens für diejenigen Werthe von z, für welche das Integral eine bestimmte Bedeutung hat, eine convergirende ist, sondern auch dass

$$(10) \qquad \int_0^1 yx^{z-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}.$$

Der Convergenzbereich der rechten Seite von (10) ist nicht wie jener Bereich, in dem die linke Seite einen bestimmten Sinn hat, ein beschränkter. Es kann unter den oben gemachten Voraussetzungen bewiesen werden, dass diese Reihe immer convergirt, wenn nur z von den Wurzeln der Gleichungen

$$\mathbf{r}_0(z+\nu) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verschieden ist. Nehmen wir zunächst an, es sei $|a_0| > |b_0|$, so nähert

sich offenbar der Quotient eines Gliedes der Reihe durch das vorhergehende, d. h. die Grösse

$$\frac{\mathbf{R}(z+m)}{\mathbf{R}(z+m-1)}\cdot\frac{\mathbf{r}_1(z+m)}{\mathbf{r}_0(z+m)},$$

wenn m ohne Ende wächst, einer Grenze, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, und es ergiebt sich leicht, dass die Reihe in der Nähe jeder von den Wurzeln der genannten Gleichungen verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergirt. Ist ferner $|a_0| = |b_0|$, so entwickeln wir den obigen Quotienten nach positiven Potenzen von $\frac{1}{m}$ und erhalten nach einer einfachen Rechnung

$$\frac{\mathbf{R}(z+m)}{\mathbf{R}(z+m-1)}\cdot\frac{\mathbf{r}_1(z+m)}{\mathbf{r}_0(z+m)} = a\left(1+\frac{k-n-x}{m}+\frac{c_1}{m^2}+\ldots\right),$$

wo k die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{R}(z)$ und c_1, c_2, ... von m unabhängige Grössen bezeichnen. Weil k höchstens gleich $n-1$ und der reelle Theil von x grösser als -1 ist, so ist der reelle Theil von $k-n-x$ jedenfalls negativ. Da die Grösse a, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, von der Einheit verschieden ist, so sind nach einem bekannten Satze für die Reihe (10) die hinreichenden Convergenzbedingungen erfüllt.

In meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction* bin ich, von der Gammafunction ausgehend, auf einem anderen Wege zu Reihen der Form (10) gekommen, indem gewisse anfangs durch Partialbruchreihen dargestellte Functionen auf diese Form gebracht wurden. Stellt man die Ergebnisse dieser Arbeit mit dem Obigen zusammen, so erhellt, dass eine grosse Anzahl bestimmter Integrale auf jene Functionen zurückgeführt werden kann. Zwischen der Differentialgleichung

$$(a_0-b_0x)x^n y^{(n)} + (a_1-b_1x)x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + (a_n-b_nx)y = 0$$

einerseits und der Gammafunction andererseits ergiebt sich zugleich ein interessanter Zusammenhang, der aus der folgenden Darstellung hervorgehen wird. Fassen wir zunächst den Fall, wo $|a_0| > |b_0|$ ist, vorzugsweise ins Auge, so kann dieser Zusammenhang in aller Kürze folgendermassen angegeben werden.

Bezeichnet man mit b die erste der Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_n$, die nicht gleich Null ist, und setzt

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^n a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^m b (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_m'),$$

$$F(z) = \left(-\frac{a_n}{b}\right)^z \frac{\Gamma(z - z_1)\Gamma(z - z_2) \ldots \Gamma(z - z_n)}{\Gamma(z - z_1')\Gamma(z - z_2') \ldots \Gamma(z - z_m')},$$

so ist $F(z)$ eine der Gleichung

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

genügende Function. Diese Gleichung kann als ein Specialfall von (8) aufgefasst werden. Dem MITTAG-LEFFLER'schen Satze gemäss setze man nun

$$F(z) = P(z) + Q(z),$$

wo $P(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. In der oben genannten Arbeit ist gezeigt worden, dass $P(z)$ einer Differenzengleichung der Form (8) Genüge leistet. Andererseits überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, wenn man die Abhängigkeit der rationalen Function $R(z)$ von $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ beachtet, dass es unter den particulären Integralen der obigen Differentialgleichung eines und zwar nur ein einziges η giebt, für welches die durch

$$f(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1} dx$$

definirte Function $f(z)$ dieselbe Differenzengleichung genügt wie $P(z)$. Da die beiden Functionen $P(z)$ und $f(z)$ ausserdem die Bedingung

$$\lim_{m=\infty} P(z + m) = 0 = \lim_{m=\infty} f(z + m)$$

erfüllen, so folgt leicht aus den früheren Betrachtungen, dass sie im ganzen Gültigkeitsbereich des Integrals übereinstimmen müssen. Es giebt somit ein particuläres Integral η der Differentialgleichung (1), für welches

$$P(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1} dx.$$

Die beständig convergirende Potenzreihe $Q(z)$ genügt auch einer Differenzengleichung der Form (8). Dass dieselbe, sowie auch die Function $F(z)$, mit Hülfe eines particulären Integrals der Differentialgleichung (1) auf die Form eines bestimmten Integrals gebracht werden kann, wollen wir im Folgenden für einen ziemlich umfassenden Fall nachweisen.

3. Es soll nunmehr vorausgesetzt werden, dass a_0 und b_0 beide von Null verschieden sind. Die zum singulären Punkte

$$x = \frac{a_0}{b_0} - a$$

der Differentialgleichung (1) gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$\rho(\rho - 1) \ldots (\rho - n + 2)(\rho + \varkappa + 1) = 0.$$

Das zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ gehörige Integral, welches im Folgenden mit η bezeichnet wird, ist nun besonders bemerkenswerth. Der obigen Voraussetzung fügen wir nun noch die Bedingung hinzu, dass der reelle Theil von $\varkappa$ kleiner als $-n$ sein soll. Es sind alsdann die Werthe

$$\eta_a,\ \eta'_a,\ \ldots,\ \eta_a^{(n-1)},$$

welche $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ für $x = a$ annehmen, alle gleich Null, und das Integral

$$(11) \qquad f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1} dx$$

hat sicher eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von z grösser ist als eine gewisse reelle Zahl λ, die von den Wurzeln der zum singulären Puncte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung abhängig ist.

Da $\eta_a, \eta'_a, \ldots, \eta_a^{(n-1)}$ gleich Null sind, so folgt durch wiederholte theilweise Integration

$$\int_0^a \eta^{(\nu)} x^z dx = (-1)^\nu z(z-1) \ldots (z - \nu + 1) \int_0^a \eta x^{z-\nu} dx. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Mit Hülfe dieser Formel folgert man nun aus der Gleichung

$$\int_0^a x^{z-1}(a_0 x^n \eta^{(n)} + a_1 x^{n-1}\eta^{(n-1)} + \ldots + a_n \eta)\, dx$$

$$= \int_0^a x^z (b_0 x^n \eta^{(n)} + b_1 x^{n-1}\eta^{(n-1)} + \ldots + b_n \eta) dx$$

ganz so wie in § 1, dass $f(z)$ der linearen Differenzengleichung

$$\mathbf{r}_1(z) f(z+1) = \mathbf{r}_0(z) f(z)$$

oder

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z) f(z)$$

Genüge leistet, wo $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmt sind.

Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^n a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^n b_0 (z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n')$$

$$\mathbf{r}(z) = a \frac{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)}{(z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n')}$$

(12) $$F(z) = a^z \frac{\Gamma(z - z_1)\Gamma(z - z_2) \ldots \Gamma(z - z_n)}{\Gamma(z - z_1')\Gamma(z - z_2') \ldots \Gamma(z - z_n')},$$

so ist $F(z)$ eine Function, welche ebenfalls die Gleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z) F(z)$$

befriedigt. Es soll nun gezeigt werden, dass sich $f(z)$ und $F(z)$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden können.

Das bestimmte Integral $f(z)$ hat folgende Eigenschaften:

I. Die Gleichung $f(z+1) = \mathbf{r}(z) f(z)$ besteht für alle Werthe von z, für die das Integral einen bestimmten Sinn hat.

II. Man kann eine reelle Zahl α so annehmen, dass sie in algebraischem Sinne grösser als der reelle Theil einer jeden der Grössen $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ ist, und dass $f(z)$ in der Nähe jeder Stelle $z_0 = \zeta + i\zeta'$,

für welche $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ist, in eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Das letztere ist die Folge eines bekannten Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale.[1]

III. In dem soeben erwähnten Bereiche von z kann der absolute Betrag von $a^{-z}f(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Es ist nämlich, wenn man $x = at$ setzt,

$$a^{-z}f(z) = a^{-z}\int_0^a \eta x^{z-1}\,dx = \int_0^1 \eta t^{z-1}\,dt$$

und t eine *reelle* Veränderliche, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung sofort ergiebt.

Betrachten wir jetzt die Function $F(z)$, so ist unmittelbar ersichtlich, dass sie die Eigenschaften I und II besitzt. Mit Hülfe des analytischen Ausdruckes der Gammafunction findet man ohne besondere Schwierigkeit, dass $F(z)$ auch die Bedingung III erfüllt.

Nun habe ich mich von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugt, der übrigens nur ein Specialfall eines viel allgemeineren ist.

Es giebt, abgesehen von einem constanten Factor, nur eine einzige analytische Function, welche die Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ befriedigt und ausserdem die unter II und III erwähnten Eigenschaften besitzt, und zwar ist diese Function identisch mit

$$a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')}.$$

In Folge dieses Satzes ist

$$(13) \qquad a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')} = C\,.\int_0^a \eta x^{z-1}\,dx$$

für alle Werthe von z, für welche das Integral einen bestimmten Sinn hat.

Durch diese allgemeine und, so viel ich weiss, neue Gleichung wird eine grosse Menge bestimmter Integrale auf die Gammafunction zurückgeführt.

[1] Siehe SCHEEFFER, *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, CRELLES Journal, Bd. 97, S. 237.

In der Theorie der bestimmten Integrale hat bekanntlich die Gammafunction eine grosse Anwendung. Es sind besonders die Gleichungen

$$\text{(14)} \qquad \frac{\Gamma(z)}{m^z} = \int_0^\infty e^{-mx} x^{z-1} dx$$

$$\text{(15)} \qquad \frac{\Gamma(z)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\alpha-1} dx,$$

welche sehr oft benutzt werden. Deswegen und weil die Gleichung (15) nur ein Specialfall von (13) ist, gewinnt diese allgemeinere Gleichung ein besonderes Interesse.

Ich behalte mir vor bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen, dass die Gleichung (14) in ähnlicher Weise wie (15) verallgemeinert werden kann.

Die Potenzen des Eulerschen Integrals erster Gattung können nun beispielsweise in der Form eines bestimmten Integrals ausgedruckt werden. Setzt man nämlich

$$a = 1, \; z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0, \; z_1' = z_2' = \ldots = z_n' = -\alpha,$$

so wird

$$\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)}\right)^n = C \cdot \int_0^1 \eta x^{z-1} dx,$$

wo η die folgende Differentialgleichung befriedigt

$$\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} x \ldots x \frac{d}{dx} y = x^\alpha \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} x \ldots x \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} y.$$

Die Anzahl der bezeichneten Differentiationen ist auf beiden Seiten gleich n. Nimmt man an, es sei α eine positive ganze Zahl, so erhält man eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-1)}{z(z+1)\ldots(z+\alpha-1)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\alpha-1} dx.$$

Durch eine geeignete Specialisirung von (13) erhält man ferner die Gleichung

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z-\gamma+1)}{\Gamma(z-\alpha+1)\,\Gamma(z-\beta+1)}$$

$$= C.\int_0^1 F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{z-1}dx,$$

wo F die hypergeometrische Reihe bezeichnet.

Ist a von 1 verschieden, so kann offenbar die oben betrachtete Function $F(z)$ folgendermassen als Summe zweier Integrale dargestellt werden

(16) $$F(z) = \int_0^a \eta x^{z-1}dx = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx + \int_1^a \eta x^{z-1}dx,$$

wobei η statt $C.\eta$ geschrieben ist. Setzen wir

$$P(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx$$

$$Q(z) = \int_1^a \eta x^{z-1}dx,$$

so hat das Integral $Q(z)$ für jeden Werth von z eine bestimmte Bedeutung und kann in Folge eines schon früher benutzten Satzes in der Nähe jeder endlichen Stelle z_0 nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-z_0$ entwickelt werden. Sie hat mithin den Charakter einer ganzen Function und kann daher in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelt werden. Nach § 1 befriedigt $P(z)$ eine Differenzengleichung der Form

$$P(z+1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{R}(z),$$

und mithin $Q(z) = F(z) - P(z)$ die Gleichung

(17) $$Q(z+1) = \mathbf{r}(z)Q(z) + \mathbf{R}(z).$$

In der Umgebung von $x = 0$ kann das Integral η durch eine Summe von Reihen der Form

$$\eta_\rho = x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}\log x + \ldots + C_{k-1}^{(\nu)}(\log x)^{k-1}\right]x^\nu.$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Diese Reihen convergiren bekanntlich innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = 0$ und dem Radius $|a| = \left|\frac{a_0}{b_0}\right|$. Ist nun $|a| > 1$, so kann offenbar der Ausdruck $x^{z-1}\eta_\rho$ mit Hülfe der Formel

$$\int_0^1 x^{z-1}(\log x)^{m-1}dx = \frac{(-1)^{m-1}\,1\,.\,2\,\ldots(m-1)}{z^m}$$

gliedweise integrirt werden, und es ergiebt sich dann eine gewöhnliche Partialbruchreihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_1^{(\nu)}}{z+\rho+\nu} + \frac{A_2^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^2} + \ldots + \frac{A_\lambda^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^\lambda}\right), \tag{18}$$

welche immer convergirt, wenn z von den Grössen

$$-\rho-\nu \qquad \begin{pmatrix}\rho = \rho_1, & \rho_2, & \ldots\\ \nu = 0, & 1, & 2 \ldots\end{pmatrix}$$

verschieden ist. Das Integral $P(z)$ kann mithin in der Form einer Summe von Partialbruchreihen der Gestalt (18) ausgedruckt werden. Hiermit vergleiche man § 5 meiner früher erwähnten Abhandlung.

Auch im Falle $|a_0| = |b_0|$ ist, wie ich hier nicht näher ausführen will, die gliedweise Integration erlaubt, wenn z die oben festgesetzte Bedingung erfüllt. Diese Bedingung ist übrigens für eine solche Integration, wenn auch hinreichend, bei weitem nicht immer nothwendig. Es soll bei dieser Gelegenheit auch nicht näher erörtert werden, ob diese Bedingung für die übrigen in diesem § dargestellten Resultate nothwendig sei. In der That kann ich gegenwärtig keinenfalls eine vollständige Darstellung des Gegenstandes dieser Arbeit beabsichtigen, weil eine solche Darstellung von einigen allgemeinen, auf Gammafunctionen sich beziehenden Sätzen vorausgegangen werden muss, die sich nicht in früheren Arbeiten finden dürften, wenn man von einigen ganz speciellen, von Scheeffer [1] bewiesenen absieht. In der nächsten Zeit werde ich eine Arbeit veröffentlichen, wo ich den Gegenstand meiner früheren und der vorliegenden Abhandlung in einer vollständigeren Gestalt darzustellen beabsichtige.

[1] *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, Crelle's Journal, Bd. 97.

4. Ist b_0 von Null verschieden, so können die Integrale y der Differentialgleichung (1) in der Umgebung von $x = \infty$ durch eine Summe von Reihen der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C'_0 + C'_1 \log\frac{1}{x} + \ldots + C'_{\lambda-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\lambda-1} \right] \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}.$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Bezeichnet man wie früher die Wurzeln der Gleichung $\mathbf{r}_1(z) = 0$ mit $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, so sind nach § 1 $z'_1 + 1, z'_2 + 1, \ldots, z'_n + 1$ die Wurzeln der genannten Fundamentalgleichung. Ist nun der singuläre Punkt $x = \frac{a_0}{b_0} = a$ von 1 verschieden, was in diesem § angenommen wird, so ist, damit das Integral

$$(19) \qquad \mathfrak{g}(z) = \int_1^{\infty} y x^{z-1} dx$$

einen bestimmten Werth habe, nach dem gesagten im Allgemeinen erforderlich und immer hinreichend, dass der reelle Theil von z in algebraischem Sinne kleiner als die reelle Zahl μ sei, womit der kleinste unter den reellen Theilen von $z'_1 + 1, z'_2 + 1, \ldots, z'_n + 1$ bezeichnet wird.

In § 1 ist gezeigt worden, dass das Integral

$$(20) \qquad f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx$$

die Gleichung

$$(21) \qquad \mathbf{r}_1(z) f(z+1) = \mathbf{r}_0(z) f(z) - R(z)$$

befriedigt. In ganz ähnlicher Weise findet man jetzt, dass $\mathfrak{g}(z)$ der Gleichung

$$(22) \qquad \mathbf{r}_1(z) \mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}_0(z) \mathfrak{g}(z) + R(z)$$

Genüge leistet. Die ganzen Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmt. Die ganze Function $R(z)$ ist auch in den beiden Gleichungen (21) und (22) dieselbe, wenn y in (19) und (20) dasselbe Integral bezeichnet, was im Folgenden angenommen wird.

Setzt man wie früher in § 2

$$\frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{r}(z), \qquad \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so folgt aus (22)

$$(23) \qquad \mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z) + \mathbf{R}(z)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung

$$(24) \qquad \mathfrak{g}(z) = \mathbf{R}(z-1) + \mathbf{r}(z-1)\mathbf{R}(z-2) + \ldots$$
$$\ldots + \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m+1)\mathbf{R}(z-m)$$
$$+ \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m)\mathfrak{g}(z-m).$$

Es sei nun für einen Augenblick entweder $|a_0| < |b_0|$ oder $|a_0| = |b_0|$, und im letzten Falle der reelle Theil von

$$\varkappa = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} - n = z_1' + z_2' + \ldots + z_n' - z_1 - z_2 - \ldots - z_n$$

in algebraischem Sinne grösser als -1, so kann bewiesen werden, dass das Restglied in (24) für wachsendes m sich der Grenze Null nähert. Dies ist, wenn $|a_0| < |b_0|$ ist, unmittelbar ersichtlich; denn das Product

$$\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m)$$

wird alsdann mit wachsendem m unendlich klein, was offenbar auch mit $\mathfrak{g}(z-m)$ der Fall ist. Ist $|a_0| = |b_0|$, so bringen wir das Restglied in (24) auf die Form

$$\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m)\mathfrak{g}(z-m)$$
$$= a^{-m}m^{\varkappa}\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m)\cdot\frac{\mathfrak{g}(z-m)}{a^{-m}m^{\varkappa}}.$$

Aus § 2 meiner früheren Abhandlung ergiebt sich, dass der erste Factor rechter Hand für wachsendes m sich der endlichen Grenze

$$\lim_{m=\infty} a^{-m}m^{\varkappa}\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-m)$$
$$= \frac{\Gamma(1+z_1'-z)\Gamma(1+z_2'-z)\ldots\Gamma(1+z_n'-z)}{\Gamma(1+z_1-z)\Gamma(1+z_2-z)\ldots\Gamma(1+z_n-z)}$$

nähert. Da der reelle Theil von z kleiner als die oben genannte Zahl μ vorauszusetzen ist, so giebt es offenbar eine positive Constante A, welche die Bedingung

$$|yx^z| < A$$

erfüllt, wenn x auf das Intervall $1 \ldots \infty$ beschränkt ist. In Folge eines Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale ist dann

$$|\mathfrak{g}(z-m)| \leqq \int_1^\infty |yx^z| x^{-m-1} dx < A \int_1^\infty \frac{dx}{x^{m+1}} = \frac{A}{m}$$

und mithin

$$\left|\frac{\mathfrak{g}(z-m)}{m^{\varkappa}}\right| < \frac{A}{m^{\varkappa-1}}.$$

Da unserer Annahme nach der reelle Theil von $\varkappa > -1$ ist, so folgt hieraus dass das Restglied in (24) für wachsendes m sich der Grenze 0 nähert. Hiermit ist nun unter den oben erwähnten Voraussetzungen nachgewiesen, nicht nur dass die Reihe

$$\mathbf{R}(z-1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-\nu+1)\mathbf{R}(z-\nu)$$

wenigstens für diejenigen Werthe von z, für welche das Integral eine Bedeutung hat, eine convergirende ist, sondern auch dass

$$(25) \qquad \int_1^\infty yx^{z-1} dx = \mathbf{R}(z-1) + \sum_1^\infty \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-\nu+1)\mathbf{R}(z-\nu).$$

In ähnlicher Weise wie in § 2 wird gezeigt, dass der Convergenzbereich dieser Reihe nicht, wie der Bereich von z in dem das Integral einen bestimmten Sinn hat, ein beschränkter ist.

Die beiden Integrale (19) und (20) haben im Allgemeinen nicht gleichzeitig eine bestimmte Bedeutung. Damit dies der Fall sei, müssen die Wurzeln der zu den singulären Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichungen eine gewisse Bedingung erfüllen. Bezeichnet λ den in algebraischem Sinne grössten Werth, den der reelle Theil einer Wurzel der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ haben kann, so hat das Integral (20) eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist. Das Integral (19) hat auch eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil

von $z < \mu$ ist, wo μ die oben angegebene Zahl bezeichnet. Ist also $\lambda < \mu$, so haben diese Integrale gleichzeitig eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ die Bedingung

$$\lambda < \zeta < \mu \tag{26}$$

erfüllt. In dem durch (26) charakterisirten Bereich von z stimmt alsdann das Integral

$$\int_0^\infty y x^{z-1} dx = \int_0^1 y x^{z-1} dx + \int_1^\infty y x^{z-1} dx \tag{27}$$

mit einer analytischen Function $\Phi(z)$ überein, die in Folge von (21) und (22) die Eigenschaft

$$\Phi(z + 1) = \mathbf{r}(z)\Phi(z)$$

besitzt. Bezeichnet also $F(z)$ die durch (12) definirte Function, so kann

$$\Phi(z) = \varphi(z)F(z)$$

gesetzt werden, wo $\Phi(z)$ eine periodische Function bezeichnet, die ich bei einer anderen Gelegenheit bestimmen werde.

Ist $|a_0| = |b_0|$ und der reelle Theil von $\varkappa > -1$, so convergiren die Reihen (10) und (25) gleichzeitig. Setzt man unter dieser Annahme

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+m)} + \mathbf{R}(z-1) \tag{28}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-\nu+1)\mathbf{R}(z-m),$$

so ist $\Phi(z)$ eine analytische Function mit der Eigenschaft

$$\Phi(z + 1) = \mathbf{r}(z)\Phi(z).$$

Diese Function kann offenbar auf die Form (27) gebracht werden, wenn die Bedingung $\lambda < \zeta < \mu$ erfüllt ist.

5. Nunmehr betrachten wir das Integral

$$\mathfrak{g}(z) = \int_0^\infty \eta x^{z-1} dx, \tag{29}$$

wo η dieselbe Bedeutung hat wie in § 3. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das Integral längs einer Geraden erstreckt ist, deren Verlängerung durch den Origo geht. Wenn der reelle Theil von $z < -n$ ist, so sind die Werthe, welche $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ für $x = a$ annehmen, alle gleich Null. Hieraus folgt nun leicht, dass $\mathfrak{g}(z)$ der Differenzengleichung

$$\mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z) \tag{30}$$

Genüge leistet.

Das Integral $\mathfrak{g}(z)$ hat folgende Eigenschaften.

I. Die Gleichung $\mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z)$ besteht für alle Werthe von z, für die das Integral einen bestimmten Sinn hat.

II. Man kann eine reelle Zahl $\alpha + 1$ so annehmen, dass sie in algebraischem Sinne kleiner als der reelle Theil einer jeden der Grössen $z_1 + 1, z_2 + 1, \ldots, z_n + 1$ ist, und dass $\mathfrak{g}(z)$ in der Nähe jeder Stelle $z_0 = \zeta + i\zeta'$, für welche $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ist, in eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. (Vergl. § 3, II.)

III. In dem soeben erwähnten Bereiche von z kann der absolute Betrag von $a^{-z}\mathfrak{g}(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Es ist nämlich, wenn man $x = at$ setzt,

$$a^{-z}\mathfrak{g}(z) = a^{-z}\int_a^\infty \eta x^{z-1}dx = \int_1^\infty \eta t^{z-1}dt,$$

und t eine reelle Veränderliche, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt.

Betrachtet man die Function

$$G(z) = a^z \frac{\Gamma(1+z_1'-z)\Gamma(1+z_2'-z)\ldots\Gamma(1+z_n'-z)}{\Gamma(1+z_1-z)\Gamma(1+z_2-z)\ldots\Gamma(1+z_n-z)},$$

so erhellt leicht, dass sie die Eigenschaften I und II besitzt. Mit Hülfe des bekannten analytischen Ausdruckes der Gammafunction überzeugt man sich, dass $G(z)$ auch die Bedingung III erfüllt. Es gilt nun folgender Satz, der aus dem entsprechenden in § 3 abgeleitet werden kann.

Es giebt, abgesehen von einem constanten Factor, nur eine einzige analytische Function, welche die Gleichung $G(z+1) = \mathbf{r}(z)G(z)$ befriedigt und ausserdem die unter II und III bezeichneten Eigenschaften besitzt, und zwar ist diese Function identisch mit $G(z)$.

In Folge dieses Satzes ist

$$(31) \qquad a^z \frac{\Gamma(1+z_1'-z)\Gamma(1+z_2'-z)\ldots\Gamma(1+z_n'-z)}{\Gamma(1+z_1-z)\Gamma(1+z_2-z)\ldots\Gamma(1+z_n-z)} = C\int_a^\infty \eta x^{z-1}\,dx.$$

Die in § 3 betrachtete Function $F(z)$ ist mit $G(z)$ mittelst der Gleichung

$$(32) \qquad G(z) = F(z)\frac{\sin\pi(z-z_1)\sin\pi(z-z_2)\ldots\sin\pi(z-z_n)}{\sin\pi(z-z_1')\sin\pi(z-z_2')\ldots\sin\pi(z-z_n')}$$

verbunden.

6. Im Vorigen haben wir die Integrale

$$(33) \qquad \int_0^a yx^{z-1}\,dx, \qquad \int_a^\infty yx^{z-1}\,dx, \qquad a = \frac{a_0}{b_0}$$

nur für den Fall betrachtet, wo y dem zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ der Fundamentalgleichung

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2)(\rho+\varkappa+1) = 0$$

gehörigen Integrale η gleich ist. Aus dieser Fundamentalgleichung und aus der allgemeinen Form der Integrale der Differentialgleichung (1) für die Umgebung von $x = 0$ und $x = \infty$ erhellt sofort, dass das erste Integral für hinreichend grosse und das zweite für hinreichend kleine Werthe des reellen Theiles von z eine bestimmte Bedeutung hat, wenn y irgend eine lineare Function der zu den Wurzeln $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ gehörigen Integrale bezeichnet.

Durch die Substitution $x = at$ gehen die Integrale (33) in die folgenden über

$$\int_0^a yx^{z-1}\,dx = a^z\int_0^1 yt^{z-1}\,dt, \qquad \int_a^\infty yx^{z-1}\,dx = a^z\int_1^\infty yt^{z-1}\,dt,$$

wo y, wenn t als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, eine Differentialgleichung befriedigt, die ebenfalls die allgemeine Form (1) hat,

für die aber der Punkt $t = 1$ ein singulärer ist. Es darf daher angenommen werden, dass a in den Integralen (33) gleich 1 ist.

Bezeichnet nun y eine lineare Function der zu den Wurzeln $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ gehörigen Integrale, so hat das bestimmte Integral

$$(34) \qquad f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx$$

einen endlichen Werth, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist, wo λ die früher angegebene Zahl bedeutet. In Folge dessen, was in § 1 dargestellt ist, genügt $f(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z) f(z+1) = \mathbf{r}_0(z) f(z) - R(z).$$

Wenn man die Bildungsweise der Coefficienten der ganzen Function $R(z)$ beachtet, so ergiebt sich für den gegenwärtigen Fall ($a_0 = b_0$), dass $R(z)$ höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades sein kann. Nehmen wir jetzt an, es sei der reelle Theil von $z > -1$, so ergiebt sich ganz so wie in § 2, dass $f(z)$ durch die Reihe (10) dargestellt werden kann.

Ist der reelle Theil von $z < \mu$, wo μ die in § 4 definirte Zahl bezeichnet, und werden die obigen Voraussetzungen festgehalten, so erhält man für

$$(35) \qquad \mathfrak{g}(z) = \int_1^t y x^{z-1} dx$$

die Reihenentwickelung (25).

In den Fällen, wo die bestimmten Integrale (34) und (35) nicht in Reihen der oben genannten Form entwickelt werden können, sind sie, wie ich hier nicht näher ausführen will, durch gewöhnliche Partialbruchreihen darstellbar, und zwar auch wenn y das allgemeine Integral bezeichnet.

7. Die in der vorliegenden und in meiner früher erwähnten Arbeit entwickelten oder angedeuteten Sätze gehören zu einer sehr umfassenden Theorie, wo lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung in Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in der vorhin angegebenen Weise untersucht werden können. Da die Gammafunction für die Theorie der linearen Differenzengleichungen von grosser Wichtigkeit ist, so wird sie, in Folge des innigen Zusammenhanges zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, auch in

der Theorie der linearen Differentialgleichungen eine interessante und wichtige Anwendung haben. Der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen ist, das Gesagte etwas näher auseinanderzusetzen.

Dass die Gammafunction auch in der Theorie der linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung in Betracht genommen werden muss, ergiebt sich folgenderweise. Bezeichnen $\mathbf{r}_{01}(z), \ldots, \mathbf{r}_{0m}(z)$ rationale Functionen, und setzt man, unter $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ verschiedene Functionen der Form

$$a^z \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_\mu)\Gamma(a_1'-z)\ldots\Gamma(a_{\mu'}'-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_\nu)\Gamma(\beta_1'-z)\ldots\Gamma(\beta_{\nu'}'-z)}$$

verstehend:

$$F(z) = \mathbf{r}_{01}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{0m}(z)F_m(z),$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbf{r}_{01}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{0m}(z)F_m(z) \\ F(z+1) &= \mathbf{r}_{11}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{1m}(z)F_m(z) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(z+m) &= \mathbf{r}_{m1}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{mm}(z)F_m(z), \end{aligned}$$

wo $\mathbf{r}_{11}(z), \ldots, \mathbf{r}_{mm}(z)$ rationale Functionen bezeichnen. Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ die homogene lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung

$$(36) \qquad \mathbf{r}_0(z)F(z) + \mathbf{r}_1(z)F(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)F(z+m) = 0.$$

Es kann offenbar angenommen werden, dass $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ *ganze* rationale Functionen bedeuten. Nach dem Mittag-Leffler'schen Satze kann $F(z)$ auf die Form

$$(37) \qquad F(z) = P(z) + Q(z)$$

gebracht werden, wo $P(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. Stellt man die letzte Gleichung mit (1) zusammen, so folgt unmittelbar, dass $P(z)$ der Gleichung

$$(38) \qquad \mathbf{r}_0(z)P(z) + \mathbf{r}_1(z)P(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)P(z+m) = R(z)$$

genügen muss, wo $R(z)$ eine ganze, rationale oder transcendente, Function

bezeichnet. Aus den Gleichungen (36), (37) und (38) folgt sodann, dass $Q(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)P(z) + \mathbf{r}_1(z)P(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)P(z+m) = -R(z)$$

Genüge leistet. Diese letzte Gleichung sagt natürlich nur in dem Falle etwas Bemerkenswerthes aus, wo sich $R(z)$ auf eine *rationale* ganze Function reducirt, was sehr oft der Fall ist. — Die beiden Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ können ebenso wie $F(z)$, als eine Summe von Functionen, die lineare Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen, dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$\mathbf{r}_{0\lambda}(z)F_\lambda(z) = P_\lambda(z) + Q_\lambda(z), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $P_\lambda(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q_\lambda(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet, so kann offenbar

$$P(z) = P_1(z) + \ldots + P_m(z)$$

$$Q(z) = Q_1(z) + \ldots + Q_m(z),$$

gesetzt werden, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt, da $\mathbf{r}_{0\lambda}(z)F_\lambda(z)$, und somit auch $P_\lambda(z)$ und $Q_\lambda(z)$, eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung befriedigt.

Für die Integration linearer Differenzengleichungen höherer Ordnung ist durch die obige Betrachtung sehr wenig geleistet, da wir dabei nicht von einer beliebig *gegebenen* Differenzengleichung ausgegangen sind. Durch eine weitere Verfolgung der nachstehenden kurzen Andeutungen kann aber die Theorie der linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung in vollständiger Uebereinstimmung mit der Theorie der Gleichungen erster Ordnung entwickelt werden.

Es sei

$$(39) \qquad \mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(z+m) = R(z)$$

eine beliebige Differenzengleichung, wo $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ bestimmte ganze rationale Functionen bezeichnen, $R(z)$ aber als eine unbestimmte ganze, rationale oder transcendente, Function betrachtet wird. Versucht man diese Gleichung durch eine Partialbruchreihe der Form

$$(40) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^\mu} + \frac{A_{\mu-1}^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-a+\nu}\right)$$

zu befriedigen, so findet man zunächst, dass $z = a$ eine μ-fache Wurzel der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ sein muss. Ferner müssen die Constanten A den folgenden Gleichungen genügen:

$$\left|\begin{array}{l}
\mathbf{r}_0(a-1)A_\mu^{(1)} + \mathbf{r}_1(a-1)A_\mu^{(0)} = 0 \\
[\mathbf{r}_0(a-1)A_{\mu-1}^{(1)} + \mathbf{r}_0'(a-1)A_\mu^{(1)}] + [\mathbf{r}_1(a-1)A_{\mu-1}^{(0)} + \mathbf{r}_1'(a-1)A_\mu^{(0)}] = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\left[\mathbf{r}_0(a-1)A_1^{(1)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}^{(\mu-1)}(a-1)}{\lfloor \mu-1}A_\mu^{(1)}\right] \\
\qquad\qquad + \left[\mathbf{r}_1(a-1)A_1^{(0)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}^{(\mu-1)}(a-1)}{\lfloor \mu-1}A_1^{(0)}\right] = 0
\end{array}\right.$$

. . . .

$$\left|\begin{array}{l}
\mathbf{r}_0(a-m+1)A_\mu^{(m-1)} + \ldots + \mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_\mu^{(0)} = 0 \\
[\mathbf{r}_0(a-m+1)A_{\mu-1}^{(m-1)} + \mathbf{r}_0'(a-m+1)A_\mu^{(m-1)}] + \ldots \\
\qquad \ldots + [\mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_{\mu-1}^{(0)} + \mathbf{r}_{m-1}'(a-m+1)A_\mu^{(0)}] = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\left[\mathbf{r}_0(a-m+1)A_1^{(m-1)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}_0^{(\mu-1)}(a-m+1)}{\lfloor \mu-1}A_\mu^{(m-1)}\right] + \ldots \\
\qquad \ldots + \left[\mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_1^{(0)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}_{m-1}^{(\mu-1)}(a-m+1)}{\lfloor \mu-1}A_\mu^{(0)}\right] = 0
\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}
\mathbf{r}_0(a-\nu)A_\mu^{(\nu)} + \ldots + \mathbf{r}_m(a-\nu)A_\mu^{(\nu-m)} = 0 \\
[\mathbf{r}_0(a-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu)} + \mathbf{r}_0'(a-\nu)A_\mu^{(\nu)}] + \ldots + [\mathbf{r}_m(a-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-m)} + \mathbf{r}_m'(a-\nu)A_\mu^{(\nu-m)}] = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\left[\mathbf{r}_0(a-\nu)A_1^{(\nu)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}_0^{(\mu-1)}(a-\nu)}{\lfloor \mu-1}A_\mu^{(\nu)}\right] + \ldots \\
\qquad \ldots + \left[\mathbf{r}_m(a-\nu)A_1^{(\nu)} + \ldots + \dfrac{\mathbf{r}_m^{(\mu-1)}(a-\nu)}{\lfloor \mu-1}A_\mu^{(\nu-m)}\right] = 0
\end{array}\right.$$

$$(\nu = m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots)$$

Es seien nun die Grössen $\mathbf{r}_0(a-\nu)$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, der Einfachheit halber von Null verschieden, so erhellt aus den obigen Gleichungen, dass zu der μ-fachen Wurzel $z = a$ der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ μ von einander linear unabhängige Partialbruchreihen der Form (40) gehören, welche die Differenzengleichung (39) wenigstens *formell* befriedigen. Die Constanten $A_\mu^{(0)}, \ldots, A_1^{(0)}$ des ersten Gliedes von $f(z)$ können beliebig angenommen werden; die Constanten der folgenden Glieder erhalten nachher eindeutig bestimmte Werthe, die mit Hülfe der obigen Gleichungen als homogene lineare Functionen von $A_\mu^{(0)}, \ldots, A_1^{(0)}$ ausgedruckt werden können.

Aus dem Beweise des MITTAG-LEFFLER'schen Satzes geht hervor, dass die ganzen rationalen Functionen $\mathfrak{g}_\nu(z)$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, immer so gebildet werden können, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-a+\nu} + \mathfrak{g}_\nu(z)\right)$$

gleichmässig convergirt. Hieraus erhellt nun zwar leicht, dass man immer die Differenzengleichung (39) befriedigende Functionen bilden kann, wenn $R(z)$ nur der Bedingung, eine ganze Function zu sein, unterworfen ist. Das grösste Interesse kommt indessen solchen Functionen zu, für welche die entsprechenden Functionen $R(z)$ rational sind. Ein ziehmlich umfassender Fall, wo man solche Functionen erhält, soll hier angegeben werden. Bezeichnet man mit n die positive ganze Zahl, welche die überhaupt höchste in irgend einer der Coefficienten $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ vorkommende Potenz von z angiebt, und setzt man

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0(z) &= c_0^{(0)} z^n + c_1^{(0)} z^{n-1} + \ldots + c_n^{(0)} \\
\mathbf{r}_1(z) &= c_0^{(1)} z^n + c_1^{(1)} z^{n-1} + \ldots + c_n^{(1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{r}_m(z) &= c_0^{(m)} z^n + c_1^{(m)} z^{n-1} + \ldots + c_n^{(m)},
\end{aligned}$$

so ist die Reihe (40), wie auch die Constanten A des ersten Gliedes angenommen werden, gleichmässig convergent, wenn jede Wurzel der Gleichung

$$(41) \qquad c_0^{(0)} + c_0^{(1)} x + \ldots + c_0^{(m)} x^m = 0$$

dem absoluten Betrage nach grösser als 1 ist. — Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich am einfachsten aus den Betrachtungen, welche im

Folgenden über lineare Differentialgleichungen angestellt werden. — In diesem Falle gehören also zu jeder μ-fachen Wurzel $z = a$ der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ μ von einander linear unabhängige, die Differenzengleichung (39) befriedigende Partialbruchreihen der Form (40), durch welche jede andere zu derselben Wurzel gehörige Reihe als homogene lineare Function ausgedruckt werden kann. Jede homogene lineare Function von diesen zu derselben oder zu verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ gehörigen Reihen befriedigt offenbar auch die Differenzengleichung (39). Dass die ganze Function $R(z)$, welche von der jedesmal in Betracht genommenen Function abhängig ist, rational sein muss, geht auch in ziemlich einfacher Weise hervor. — Es ist zu bemerken, dass die obige auf die Wurzeln der Gleichung (41) sich beziehende Voraussetzung für die Convergenz der erhaltenen Partialbruchreihen (40) nicht immer nothwendig ist.

Die soeben betrachteten Functionen können auch auf eine andere Form gebracht werden. Setzt man nämlich

$$\frac{\mathbf{r}_1(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = -\mathbf{R}_1(z), \; \ldots, \; \frac{\mathbf{r}_m(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = -\mathbf{R}_m(z), \; \frac{R(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so können sie, wie ich hier nicht näher ausführen will, durch die Reihe

$$(42) \qquad \sum_0^\infty \varphi_\nu(z)$$

dargestellt werden, wenn man die rationalen Functionen φ mit Hülfe der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\varphi_0(z) = \mathbf{R}(z)$$

$$\varphi_1(z) = \mathbf{R}_1(z)\varphi_0(z+1)$$

$$\varphi_2(z) = \mathbf{R}_1(z)\varphi_1(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_0(z+2)$$

. . . .

$$\varphi_m(z) = \mathbf{R}_1(z)\varphi_{m-1}(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_{m-2}(z+2) + \ldots + \mathbf{R}_m(z)\varphi_0(z+m)$$

. . . .

$$\varphi_\nu(z) = \mathbf{R}_1(z)\varphi_{\nu-1}(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_{\nu-2}(z+2) + \ldots + \mathbf{R}_m(z)\varphi_{\nu-m}(z+m)$$

. . . .

Ein specieller Fall der obigen Reihe (42) ist die in § 2 betrachtete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}.$$

Auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen muss angenommen werden, dass auch zwischen den linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung und den linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten ein demjenigen ähnlicher Zusammenhang stattfindet, der früher zwischen den linearen Differenzengleichungen erster Ordnung und den Differentialgleichungen der Form (1) nachgewiesen ist. Die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt sich vollständig, wenn man die lineare Differentialgleichung

$$(43)\qquad \begin{aligned} & x^n(a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + \ldots + a_m^{(0)}x^m)y^{(n)} \\ + \; & x^{n-1}(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \ldots + a_m^{(1)}x^m)y^{(n-1)} \\ + \; & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \; & (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \ldots + a_m^{(n)}x^m)y = 0 \end{aligned}$$

zum Ausgangspunkt der Untersuchungen wählt. Ist $a_0^{(0)}$ von Null verschieden, so haben die Integrale dieser Differentialgleichung die Eigenschaft, mit einer passenden Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben. Bezeichnet also y ein Integral der Differentialgleichung, so hat das bestimmte Integral

$$(44)\qquad f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx$$

für hinreichend grosse Werthe des reellen Theiles von z, sicher einen bestimmten endlichen Werth, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$(45)\qquad a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + \ldots + a_m^{(0)}x^m = 0,$$

und somit die singulären Punkte der Differentialgleichung von 1 verschieden sind. Durch eine Rechnung, die der in § 1 angestellten ganz ähnlich ist, kann nun gezeigt werden, dass $f(z)$ die folgende lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung befriedigt:

$$(46)\qquad \mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(z+m) = R(z),$$

wo die Coefficienten durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt sind:

$$\mathbf{r}_0(z) = a_0^{(n)} - a_0^{(n-1)} z + \dots + (-1)^n a_0^{(0)} z(z+1)\dots(z+n-1)$$

$$\mathbf{r}_1(z) = a_1^{(n)} - a_1^{(n-1)}(z+1) + \dots + (-1)^n a_1^{(0)}(z+1)(z+2)\dots(z+n)$$

. . . .

$$\mathbf{r}_m(z) = a_m^{(n)} - a_m^{(n-1)}(z+m) + \dots + (-1)^n a_m^{(0)}(z+m)(z+m+1)\dots(z+m+n-1).$$

Diese Functionen sind mithin von dem Integrale y unabhängig. Die Coefficienten der ganzen Function $R(z)$, deren Gradzahl höchstens gleich $n-1$ ist, sind aber homogene lineare Functionen von den Werthen $y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$, welche $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ für $x = 1$ annehmen.

Ist die Differenzengleichung (46), wo $R(z)$ eine unbestimmte ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet, gegeben, so ist leicht zu sehen, dass immer eine solche lineare Differentialgleichung der Form (43) gefunden werden kann, dass jede durch (44) definirte Function $f(z)$ die gegebene Differenzengleichung befriedigt. Hierbei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Integrale $f(z)$ endliche Werthe haben, was wenigstens unter den oben erwähnten Bedingungen der Fall ist.

Die Integrale der Differentialgleichung (43), wo $a_0^{(0)}$ von Null verschieden ist, können bekanntlich in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Summe von Reihen der Form

$$y_\rho = \sum_{\nu=0} [B_1^{(\nu)} + B_2^{(\nu)} \log x + \dots + B_\mu^{(\nu)} (\log x)^{\mu-1}] x^{\rho+\nu}$$

ausgedruckt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Sind die Wurzeln der Gleichung (45) dem absoluten Betrage nach grösser als 1, so kann $y_\rho x^{z-1}$ zwischen den Grenzen 0 und 1 gliedweise integrirt werden. Dadurch ergiebt sich, wenn man die Formel

$$\int_0^1 x^{z-1} (\log x)^\lambda dx = \frac{(-1)^\lambda \lambda!}{z^{\lambda+1}}$$

benutzt, ein Resultat der Form

$$\int_0^1 y_\rho x^{z-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{A_1^{(\nu)}}{z+\rho+\nu} + \frac{A_2^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^2} + \dots + \frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^\mu} \right).$$

Hiermit vergleiche man den früher erwähnten Satz über die Convergenz von Partialbruchreihen, welche einer linearen Differenzengleichung genügen.

Sind a und b zwei singuläre Stellen der Differentialgleichung (8), an denen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ verschwinden, und setzt man entweder

$$f(z) = \int_0^a y x^{z-1} dx$$

oder

$$f(z) = \int_a^b y x^{z-1} dx,$$

so ist $f(z)$ in beiden Fällen eine Function, welche einer *homogenen* linearen Differenzengleichung genügt. — Mit Hülfe der Gammafunction kann die früher betrachtete Function $F(z)$, wenigstens in gewissen Fällen, so zusammengesetzt werden, dass sie dieselbe Differenzengleichung genügt wie $f(z)$. Es liegt daher sehr nahe anzunehmen, dass es eine ausserordentlich grosse Menge von bestimmten Integralen giebt, welche auf die Gammafunction zurückgeführt werden kann. Für die Richtigkeit dieser Annahme sprechen in der That alle im Vorhergehenden erhaltenen Resultate, besonders aber die Gleichungen (13) und (31).

Dass die Gleichung

$$f(z) = \int y x^{z-1} dx$$

einen bestimmten Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen vermittelt, ist wohl zuerst von LAPLACE bemerkt worden[1]. In seiner *Théorie analytique des probabilités* wird von diesem Umstande vielmals Gebrauch gemacht.

Der in Frage stehende Zusammenhang ist auch der Gegenstand eines vor kurzer Zeit publicirten Aufsatzes des Herrn PINCHERLE[2].

In der Abhandlung *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*[3] wendet Herr FROBENIUS eine Reihe $G(x, \rho)$ an, mit deren Hülfe er die Integration der dort betrachteten Differential-

---

[1] Man siehe beispielsweise § 21 in *Livre premier* seiner oben erwähnten Arbeit.

[2] *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni lineari alle differenze, e viceversa.* Nota del prof. S. PINCHERLE, letta al R. Istituto Lombardo nell' adunanza del 17 giugno 1886.

[3] CRELLES Journal, Bd. 76, S. 214.

gleichungen bewerkstelligt. Für den Fall wo die Coefficienten der Differentialgleichung ganze rationale Functionen sind, wird gezeigt, dass die Reihe $G(x, \rho)$, als Function von ρ betrachtet, eine lineare Differenzengleichung befriedigt. Ich halte es nicht für nöthig, den einfachen Zusammenhang zwischen dieser Reihe und den vorigen Untersuchungen näher auseinanderzusetzen.

Ich bemerke schliesslich, dass die Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(qz) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(q^m z) = R(z) \tag{47}$$

wo q eine Constante und $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$, $R(z)$ ganze rationale Functionen bezeichnen, in ähnlicher Weise untersucht werden kann wie die Differenzengleichung (46). Sie sind beide specielle Fälle der Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)f(\vartheta^0) + \mathbf{r}_1(z)f(\vartheta^1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(\vartheta^m) = R(z),$$

wo

$$\vartheta^0 = z, \qquad \vartheta^1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \vartheta^2 = \vartheta(\vartheta), \quad \ldots, \quad \vartheta^m = \vartheta(\vartheta^{m-1}).$$

Mit Hülfe des aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Productes

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + q^\nu z), \qquad |q| < 1,$$

können specielle Functionen gebildet werden, welche eine Gleichung der Form (47) befriedigen [1].

[1] Vergl. meine Abhandlung: *En grupp af transcendenta funktioner, hvilka besitta egenskaper liknande den, som tillkommer det reciproka värdet af den oändliga produkten* $\Pi(1 + q^\nu z)$, in Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1884, N:o 5, S. 125.

NOTE
SUR UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE

$$\int_0^a e^{x^2} dx$$

PAR

T. J. STIELTJES
À PARIS.

Lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = c$ comprise entre a et b, cette circonstance peut ôter toute signification précise à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Comme on sait, Cauchy a introduit dans ce cas la considération de l'expression

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Il peut arriver que cette expression tend vers une limite déterminée lorsque la quantité positive ε tend vers zéro, cette limite est alors appelée par Cauchy la *valeur principale* de l'intégrale

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Cette extension de la conception d'une intégrale définie n'est pas généralement admise, on l'a souvent rejetée à cause de sa nature trop arbitraire ou artificielle.

Riemann, dans un mémoire célèbre (Werke, p. 226) s'exprimait de la manière suivante:

»Dans certaines recherches particulières, d'autres déterminations de Cauchy sur la conception d'une intégrale définie dans les cas où celle-ci n'existe pas d'après sa définition fondamentale, peuvent être utiles, mais elles ne sont pas généralement admises, leur nature trop arbitraire ne s'y prêtant guère d'ailleurs.»

La valeur principale d'une intégrale étant une quantité nettement définie, il semble que l'admissibilité d'une telle idée doive dépendre surtout de l'utilité qu'elle peut avoir. Nous croyons que les développements suivants montrent clairement, par un exemple, que les »recherches particulières» où la conception de Cauchy est de la plus grande utilité (ou plutôt nécessaire, si nous ne nous trompons pas), ne manquent pas.

1. Nous considérons la fonction:

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2} dx$$

et nous supposons la variable réelle et positive.

On trouve facilement ce développement:

$$(1) \qquad \varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \frac{1.3}{8a^5} + \frac{1.3.5}{16a^7} + \dots\right]$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots$$

La série est divergente, mais on peut regarder cette formule simplement comme une manière symbolique d'exprimer que pour $a = \infty$ on a

$$\lim ae^{-a^2}\varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim a^3\left[e^{-a^2}\varphi(a) - \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{4},$$

etc.

Nous rencontrerons dans la suite encore d'autres développements divergents, on devra toujours les interpréter d'une manière analogue.

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce développement et de montrer comment il peut servir à l'évaluation de $\varphi(a)$.

2. Une intégration par parties donne

$$\varphi(a) = \frac{e^{a^2}}{2a} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a} x^{-2} e^{x^2} dx,$$

$$(2)\quad \varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right] + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n}\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2} dx$$

$$= T_1 + T_2 + \dots + T_n + R_n,$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant certaines constantes positives parfaitement déterminées. En effet, les fonctions qui figurent aux deux membres de (2) ont même dérivée. Ces deux fonctions seront donc identiques lorsqu'on pourra déterminer a_n de manière qu'elles soient égales pour une valeur particulière de a. Or si l'on prend a positif mais assez petit pour que

$$\varphi(a) < e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \dots + \frac{1.3\dots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right],$$

il est clair que la formule (2) détermine une valeur unique de a_n qui sera supérieure à cette valeur particulière de a.

Ces constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ vont toujours en augmentant, c'est ce qu'on voit en posant $a = a_{n+1}$ dans la relation

$$\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2} dx = \frac{e^{a^2}}{2a^{2n+1}} + \frac{2n+1}{2}\int_{a_{n+1}}^{a} x^{-2n-2} e^{x^2} dx.$$

3. Il est clair que si les constantes $a_1, a_2, \dots$ étaient connues, rien ne s'opposerait plus à un usage légitime du développement (1). Car supposons que a tombe entre a_{n-1} et a_n, alors on aura évidemment

$$\varphi(a) > T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1},$$

$$\varphi(a) < T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1} + T_n,$$

et on aura renfermé $\varphi(a)$ entre deux limites dont la différence est T_n. Il résulte de ce que nous trouverons plus tard que T_n est précisément le plus petit terme de la série $T_1 + T_2 + \dots$ ou le terme qui précède ce plus petit terme et qui en diffère très peu.

La détermination des constantes $a_1, a_2, \dots$ est donc le problème principal qui doit nous occuper.

4. Il est évident d'abord que a_n est la racine positive de l'équation transcendante

$$\varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right] \tag{3}$$

mais il nous semble à peu près impossible de tirer de là des expressions qui pourraient nous être utiles.

On peut mettre cette équation sous une autre forme plus avantageuse. Remarquons pour cela qu'en développant les deux membres de (2) suivant les puissances croissantes de a, on ne rencontre point de terme sans a dans le premier membre. Il doit en être de même dans le second membre, ce qui montre que a_n est une racine de l'équation transcendante

$$\frac{1}{2n-1}a^{-2n+1} + \frac{1}{2n-3}a^{-2n+3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2n-5}a^{-2n+5} + \ldots = 0.$$

En multipliant par a^{2n-1} et en posant $a^2 = t$, a_n^2 sera donc une racine positive de

$$\sum_0^{\prime} \frac{t^m}{(2n-2m-1)\,\underline{|m}} = 0. \tag{4}$$

Cette équation admet évidemment une seule racine positive, on montre aussi facilement que le premier membre est négatif pour $t = n$, donc

$$a_n^2 < n.$$

Mais l'équation (4), pas plus que l'équation (3), ne semble nous pouvoir conduire à ce résultat que a_n^2 est susceptible d'un développement suivant les puissances descendantes de n:

$$a_n^2 = n - \frac{1}{6} + \frac{8}{405}\frac{1}{n} + \frac{68}{25515}\frac{1}{n^2} - \frac{5582}{3444525}\frac{1}{n^3}\ldots \tag{5}$$

Ce développement, quoique divergent, n'en permet pas moins de calculer les a_n avec une grande approximation comme on le voit par ces quelques valeurs:

n	a_n^2	d'après (5)	erreur
1	0,85402	0,85413	— 0,00011
2	1,84365	1,84367	— 0,00002
5	4,8373767	4,8373776	— 0,0000009.

Déjà pour $n = 3$ l'erreur n'atteint plus une unité du cinquième ordre, et on peut considérer que notre but sera atteint, dès que nous aurons établi le développement (5).

Mais cela nous a été impossible en partant des expressions analytiques que nous avons développées jusqu'ici, et nous avons dû suivre une autre voie. C'est précisément la *valeur principale* d'une certaine intégrale définie qui se présente ici, et il nous semble que, dans cette occasion, on pourrait difficilement atteindre le but d'une autre manière.

5. Supposons $a \geqq 0$ alors on a:

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{e^{a^2(1-x^2)}}{1 - x^2} dx. \tag{6}$$

On établira cette formule en montrant d'abord que pour $a > 0$ la dérivée de l'expression au second membre est e^{a^2}, et ensuite que cette expression devient infiniment petite en même temps que a. Pour abréger nous omettons cette démonstration.

Il est évident d'ailleurs que cette formule suppose bien $a \geqq 0$, car la fonction $\varphi(a)$ est impaire. Si l'on considère les valeurs imaginaires, on trouve que a doit être de la forme $re^{i\varphi}$ avec $r > 0$ et $-\frac{\pi}{4} < \varphi < +\frac{\pi}{4}$.

En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n-2} + \frac{x^{2n}}{1 - x^2}$$

on a évidemment

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty x^{2k} e^{a^2(1-x^2)} dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k - 1)}{2^{k+1} a^{2k+1}} e^{a^2}.$$

On retrouve ainsi le développement (1) mais avec cette nouvelle expression du terme complémentaire:

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1 - x^2} e^{a^2(1-x^2)} dx. \tag{7}$$

En partant de cette formule on peut, après avoir posé

$$a^2 = n + \eta \tag{8}$$

développer R_n suivant les puissances descendantes de n, et l'on obtient

$$(9) \qquad R_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[P_0 + \frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n^2} + \dots\right]$$

où P_0, P_1, P_2, ... sont des polynômes en η, P_k étant du degré $2k + 1$

$$(10) \qquad \begin{cases} P_0 = \eta + \frac{1}{6}, \\ P_1 = \frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{24}\eta - \frac{41}{2160}, \\ P_2 = \frac{1}{40}\eta^5 - \frac{7}{48}\eta^4 + \frac{17}{144}\eta^3 + \frac{1}{96}\eta^2 + \frac{1}{1152}\eta - \frac{157}{48384}. \end{cases}$$

Ce développement est divergent mais nous avons dit déjà quel sens précis il faut y attacher.

Pour la manière d'obtenir ce développement, nous devons renvoyer à une thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, insérée dans les Annales scientifiques de l'École Normale ($3^{\text{ème}}$ Série, Tome 3, 1886, pag. 201—258).

On conclut de ce développement que R_n s'évanouit pour une valeur finie de η, dont on trouve le développement suivant les puissances descendantes de n égal à

$$-\frac{1}{6} + \frac{8}{405}\,\frac{1}{n} + \frac{68}{25515}\,\frac{1}{n^2} \dots$$

et comme nous avons posé $a^2 = n + \eta$, il en résulte

$$a_n^2 = n - \frac{1}{6} + \frac{8}{405}\,\frac{1}{n} + \dots$$

C'est précisément le développement qu'il fallait obtenir.

6. En considérant, ainsi que nous l'avons fait, la quantité a_n^2 comme racine de l'équation transcendante

$$\mathrm{v.\,p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{1 - x^2}\, e^{a^2(1-x^2)}\, dx = 0$$

la restriction que n soit un nombre entier, devient inutile et l'on définit

ainsi une fonction continue de n. Il est certain aussi que le développement obtenu donne une valeur fort approchée de cette fonction a_n^2 dès que n est un peu grand, sans être nécessairement entier.

Si l'on regarde, au contraire, la manière dont nous avons défini originairement la quantité a_n, on voit d'abord que l'équation (3) n'a un sens que lorsque n est entier. Il n'est pas possible d'étendre cette définition à d'autres valeurs. En regardant au contraire a_n^2 comme la racine positive de l'équation (4)

$$\sum_0^{\infty} \frac{t^m}{(2n-2m-1)\underline{|m}} = 0$$

on peut bien supposer n variable d'une manière continue, mais la fonction a_n^2 qu'on définit ainsi, devient discontinue lorsque la variable est égale à la moitié d'un nombre impair. Il nous semble que ces circonstances rendent à peu près impossible la déduction du développement (5) en partant directement des équations transcendantes (3) ou (4).

7. Supposons qu'on ait $a_{n-1} < a < a_n$ en sorte que

$$\varphi(a) > T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1},$$

$$\varphi(a) < T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n.$$

Calculons la valeur approchée de

$$T_n = \frac{\Gamma(2n)}{(2n-1)(2a)^{2n-1}\Gamma(n)} e^{a^2}$$

en supposant a grand.

Il est visible que la quantité $\eta = a^2 - n$ reste toujours finie, elle peut à peine franchir les limites $-\frac{1}{6}$ et $-\frac{7}{6}$. En désignant donc par ε, ε', ε'', ε''' des quantités qui s'évanouissent avec $\frac{1}{n}$, on a:

$$\Gamma(2n) = (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{\frac{\pi}{n}}(1 + \varepsilon)$$

$$\Gamma(n) = n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1 + \varepsilon')$$

$$a^{2n-1} n^{-n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\eta}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} = e^{\eta}(1 + \varepsilon'')$$

et

$$T_n = \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} \times \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')}} - \frac{1+\varepsilon'''}{a\sqrt{2}}.$$

Ainsi le développement (1) permet de renfermer $\varphi(a)$ entre deux limites dont la différence est approximativement $\frac{0.707}{a}$.

Soit $a = 4$, on voit que $a_{16} < a < a_{17}$ et nous trouvons

$$\varphi(4) > 1\,149\,400{,}605,$$

$$\varphi(4) < 1\,149\,400{,}782.$$

8. Nous ferons voir encore comment on peut pousser plus loin l'approximation et obtenir une valeur très approchée du terme complémentaire R_n.

Reprenons la formule:

$$R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2}\,dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\int_{a_n^2}^{a^2} x^{-n-\frac{1}{2}} e^{x}\,dx$$

ou

$$R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}\,n^{n+\frac{1}{2}}}\,e^n \int_{a_n^2-n}^{\eta} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx.$$

En posant

$$(11) \qquad A_n = \int_{a_n^2-n}^{0} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$(12) \qquad B = \int_{0}^{\eta} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\,dx$$

nous aurons

$$(13) \qquad R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}\,n^{n+\frac{1}{2}}}\,e^n\,[A_n + B].$$

Il est visible que A_n est une simple constante numérique qui dépend seulement de l'entier n, et qu'on peut développer de la manière suivante:

$$(14)\qquad A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \ldots$$

$$\alpha_0 = +\frac{1}{6},$$

$$\alpha_1 = -\frac{13}{1080},$$

$$\alpha_2 = -\frac{353}{90720},$$

$$\alpha_3 = +\frac{1423}{1088640}.$$

D'autre part, on voit aisément qu'on a

$$(15)\qquad B = Q_0 + \frac{Q_1}{n} + \frac{Q_2}{n^2} + \frac{Q_3}{n^3} + \ldots$$

Q_0, Q_1, Q_2, ... étant des polynômes en η qui s'évanouissent pour $\eta = 0$, Q_k du degré $2k + 1$ étant divisible par η^{k+1}. Ces polynômes sont faciles à calculer, et on trouve

$$(16)\qquad \left|\begin{aligned} Q_0 &= \eta, \\ Q_1 &= \eta^2\left(\frac{1}{6}\eta - \frac{1}{4}\right), \\ Q_2 &= \eta^3\left(\frac{1}{40}\eta^2 - \frac{7}{48}\eta + \frac{1}{8}\right), \\ Q_3 &= \eta^4\left(\frac{1}{336}\eta^3 - \frac{11}{288}\eta^2 + \frac{29}{240}\eta - \frac{5}{64}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ce développement de B est convergent sous la condition $|\eta| < n$ et comme on peut choisir n toujours de manière que $|\eta| \leqq \frac{1}{2}$ la convergence sera rapide et on peut évaluer facilement cette quantité avec toute approximation désirée.

Il est clair qu'en substituant les séries (14) et (15) dans la formule (13) on obtient un développement de R_n qu'on peut rapprocher de la formule (9). La seule différence est que le facteur $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ se trouve remplacé par $\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}n^{n+\frac{1}{2}}}e^n$, or d'après la série de Stirling on a:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}n^{n+\frac{1}{2}}}e^{n+\theta},$$

$$\theta = \left(\frac{2-1}{2}\right)\frac{B_1}{1.2n} - \left(\frac{2^3-1}{2^3}\right)\frac{B_2}{3.4n^3} + \left(\frac{2^5-1}{2^5}\right)\frac{B_3}{5.6n^5} - \ldots$$

en sorte qu'il est facile de passer de l'une des formules à l'autre.

Mais la forme (13) présente un grand avantage sur la forme (9), d'abord les polynômes Q sont plus simples et plus faciles à calculer que les polynômes P et ensuite nous savons maintenant que la divergence de la série $A_n + B$ provient uniquement de la partie A_n qui est indépendante de η.

9. Le moyen le plus simple qui permet de calculer A_n avec une approximation indéfinie, c'est de prendre $\eta = 0$ ou $a = \sqrt{n}$ dans les formules précédentes. Il vient

$$(17) \qquad \varphi(\sqrt{n}) = T_1 + T_2 + \ldots + T_n + A_n T_{n+1}.$$

Il faut calculer alors $\varphi(\sqrt{n})$ à l'aide de la série convergente

$$\varphi(a) = a + \frac{a^3}{1.3} + \frac{a^5}{1.2.5} + \ldots$$

Nous avons trouvé ainsi:

n	A_n
1	0,15231 80276 5
2	0,15987 27953 6
3	0,16227 85380 7.

D'autre part les quatres premiers termes de la série divergente (14) donnent les valeurs approchées suivantes (on a ajouté les corrections nécessaires)

0,15204 6	+ 0,00027 2
0,15983 88	+ 0,00003 40
0,16227 04	+ 0,00000 81.

On peut juger par là de l'approximation que l'on obtient pour de plus grandes valeurs de n. Dans le calcul de $\varphi(4)$ on a besoin de la constante A_{16}, et on trouve à une unité près du 8ème ordre:

$$\varphi(4) = 1149400,63458993.$$

EINIGE SÄTZE
ÜBER SUMMEN VON DIVISOREN

VON

JACOB HACKS
in BONN.

Bezeichnet man mit $f(m)$ die Anzahl der in m aufgehenden ganzen Zahlen, so ist bekanntlich, wenn die Zerlegung von m in seine Primfactoren gegeben ist

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots k^\rho,$$

wo $a, b, c, \dots, k$ von einander verschiedene Primzahlen sind,

$$(1) \qquad f(m) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\dots(\rho + 1).$$

Bedeutet $F(m)$ die Summe

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(m),$$

so ist

$$F(m) = \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{3}\right] + \dots + \left[\frac{m}{m}\right],$$

wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Bedeutet $g(m)$ die Summe der Divisoren der Zahl m, so ist

$$(2) \qquad g(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\dots\frac{k^{\rho+1} - 1}{k - 1}.$$

und bezeichnet man mit $G(m)$ die Summe

$$g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(m),$$

so ist

$$(3)\qquad G(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 2\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + \ldots + m\left[\frac{m}{m}\right].$$

Es sei jetzt m eine ungerade Zahl und es werde ein Ausdruck gesucht für die Function

$$F(m) = f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(m).$$

Offenbar kommt bei den Zahlen 1, 3, 5, ..., m die Einheit

$$\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{m}{1}\right]+1}{2}\right]$$

mal als Divisor vor, die Zahl 2, ebenso alle andern geraden Zahlen können nicht als Teiler vorkommen, die Zahl 3 erscheint $\left[\frac{\left[\frac{m}{3}\right]+1}{2}\right]$ mal als Teiler, u. s. w., die Zahl m endlich $\left[\frac{\left[\frac{m}{m}\right]+1}{2}\right]$ mal. Demnach ist

$$F(m) = \left[\frac{\left[\frac{m}{1}\right]+1}{2}\right] + \left[\frac{\left[\frac{m}{3}\right]+1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{\left[\frac{m}{m}\right]+1}{2}\right],$$

oder da allgemein die Gleichung besteht

$$\left[\frac{[r]+1}{2}\right] = \left[\frac{r+1}{2}\right],$$

$$F(m) = \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m+3}{6}\right] + \left[\frac{m+5}{10}\right] + \ldots + \left[\frac{m+m}{2m}\right].$$

Wenn man mit $G(m)$ die Summe

$$g(1) + g(3) + g(5) + \ldots + g(m)$$

bezeichnet, so ergibt sich

$$G(m) = 1\left[\frac{m+1}{2}\right] + 3\left[\frac{m+3}{6}\right] + \ldots + m\left[\frac{m+m}{2m}\right].$$

Wir bezeichnen mit $k(m)$ die Summe aus den ungeraden und den halben geraden Divisoren der Zahl m, mit $l(m)$ die Differenz aus den geraden und den ungeraden Divisoren der Zahl m, und setzen

$$K(m) = k(1) + k(2) + \ldots + k(m),$$

$$L(m) = l(1) + l(2) + \ldots + l(m).$$

Dann ist

$$K(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 1\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{4}\right] + \ldots + m\left[\frac{m}{m}\right],$$

wenn $m \equiv 1 \pmod 2$, und

$$K(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 1\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{4}\right] + \ldots + \frac{m}{2}\left[\frac{m}{m}\right],$$

wenn $m \equiv 0 \pmod 2$.

Dem letzten Gliede kann man in beiden Fällen die Form geben

$$m\left[\frac{m}{m}\right]\left(\frac{m+1}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

da $\frac{m+1}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]$ für gerades m gleich $\frac{1}{2}$, für ungerades m gleich 1 ist.

Ferner ist

$$(4) \qquad L(m) = -\left[\frac{m}{1}\right] + 2\left[\frac{m}{2}\right] - 3\left[\frac{m}{3}\right] + \ldots + (-1)^m m\left[\frac{m}{m}\right].$$

Die Kenntniss der Functionen $F(m)$, $G(m)$, $k(m)$, $l(m)$, $K(m)$, $L(m)$ verdanke ich einer Vorlesung des Herrn Professor Lipschitz. Obige Ausdrücke für $K(m)$ und $L(m)$ finden sich im 100. Bande der Comptes Rendus (R. Lipschitz, *Sur les sommes des diviseurs des nombres*, p. 845).

Von allen diesen Summenfunctionen lässt sich, wenn m als gegeben betrachtet wird, im voraus bestimmen, ob sie gerade oder ungerade sind.

Aus der Darstellung (1) der Function $f(m)$ folgt zunächst, dass $f(m)$ für jede nichtquadratische Zahl gerade, für jede Quadratzahl ungerade sein muss. Hieraus ergibt sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $f(1) = F(1)$ ungerade ist, dass $F(m)$ für 1, 2, 3 ungerade, für $m = 4$, 5, 6, 7, 8 gerade, für $m = 9$, 10, ..., 15 wieder ungerade ist, u. s. f. oder allgemein

$$F(m) \equiv [\sqrt{m}] \pmod 2.$$

Bringt man die Gleichung (2) in die Form

$$g(m) = (1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta) \ldots,$$

so sieht man, dass $g(m)$ für jede Quadratzahl notwendig ungerade ist. Ist m gleich dem Doppelten einer Quadratzahl, so ist vermöge der Gleichung

$$g(2^{2\alpha+1}n^2) = g(2^{2\alpha+1})g(n^2),$$

in welcher n eine ungerade Zahl bedeuten soll, $g(m)$ gleichfalls ungerade, da $g(2^{2\alpha+1}) \equiv 1 \pmod 2$ ist. Ist hingegen m weder gleich einer Quadratzahl noch gleich dem Doppelten einer Quadratzahl, so ist $g(m)$ offenbar gerade. Demnach ist

$$G(m) \equiv [\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \pmod 2,$$

da $G(m)$ so oft seinen Charakter (ob gerade oder ungerade) ändert, als m die Form n^2 oder $2n^2$ annimmt, und $[\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]$ genau dieselbe Eigenschaft hat. Da nun $G(1) = [\sqrt{1}] + \left[\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ ist, so ist obige Kongruenz gerechtfertigt.

In gleicher Weise findet man

$$F(m) \equiv \left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Die Richtigkeit dieser Kongruenz leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass $\left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right]$ denselben Wert behält von $m = (2n - 1)^2$ incl. bis $m = (2n + 1)^2$ excl. und einen ungeraden Wert hat für ungerades n, einen geraden Wert für gerades n. Ebenso ist auch

$$G(m) \equiv \left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Vermöge einer oben gemachten Bemerkung kann man auch schreiben

$$F(m) \equiv G(m) - \left[\frac{\sqrt{m} + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Die Function $k(m)$ ist für ungerades m gleich $g(m)$; wir können also unsere Erörterung auf den Fall $m \equiv 0 \pmod 2$ beschränken. Da gilt nun der Satz, dass für gerades m die Function $k(m)$ stets einen geraden Wert hat. Denn zu jedem geraden Divisor, welcher $\equiv 2 \pmod 4$ ist, gehört ein ungerader Divisor, (nämlich die Hälfte des geraden) und die Summe aus ersterem halb genommen und aus letzterem ist eine gerade Zahl. Denkt man sich daher die sämtlichen halb genommenen geraden Divisoren von der Form $4n + 2$ zu den zugehörigen ungeraden Divisoren addiert, so ist das Resultat eine gerade Zahl, und es bleiben, da auch umgekehrt ein ungerader Divisor ohne zugehörigen geraden Divisor von der Form $4n + 2$ nicht auftreten kann, nur noch etwaige Divisoren von der Form $4n$ übrig, deren Hälften also gerade sind. Aus diesem Satze, dass für $m \equiv 0 \pmod 2$, $k(m)$ eine gerade Zahl sein muss, folgt mit Berücksichtigung des oben über die Function $g(m)$ Gesagten die Kongruenz

$$K(m) \equiv \left[\frac{\sqrt{m} + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Zur Herleitung dieser Kongruenz kann man auch vorteilhaft benutzen die von Lipschitz in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellte Gleichung

$$k(m) = 2^{\alpha} g(m'),$$

wo $m = 2^{\alpha} m'$ eine beliebige ganze Zahl und m' eine ungerade Zahl ist. An der citierten Stelle findet sich auch die Gleichung

$$l(m) = (2^{\alpha+1} - 3) g(m'),$$

die sich zu einem Beweise der Kongruenz

$$L(m) \equiv [\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \pmod 2$$

verwenden lässt. Andererseits findet man auch durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen (3) und (4), dass

$$L(m) \equiv G(m) \pmod 2.$$

SUR LES SOMMES COMPOSÉES DES COEFFICIENTS DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Lettre adressée à Mad. Sophie Kowalevski

PAR

P. TCHEBYCHEFF
à S:t PÉTERSBOURG.

Je ne peux trop me féliciter de l'honneur que vous m'avez fait, en ayant bien voulu traduire ma note sur les valeurs limites des intégrales.[1] L'intérêt que vous avez porté à mes recherches sur ce sujet m'engage de vous présenter un résultat que je viens d'en tirer par rapport à la détermination des limites entre lesquelles reste comprise la somme d'un nombre quelconque de premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

ou

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots,$$

dans le cas, où tous les termes sont positifs. Pour la détermination de ces limites d'après les valeurs réelles des séries infinies

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots.$$

j'ai cherché les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^a F(z)\,dz,$$

[1] Voir ci-dessus, p. 35—56.

Acta mathematica. 9. Imprimé le 2 Décembre 1886.

en supposant que $F(z)$ est une fonction qui ne devient pas negative pour $z > 0$ et que l'on connaît la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-tz}F(z)dz$$

pour t réel et positif. Parmi les différentes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)dz$$

que j'ai obtenues, les plus remarquables par leur simplicité peuvent être présentées par les formules suivantes:

$$\int_0^{-\frac{\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)}} F(z)dz \geqq \Phi(\rho) - \frac{[\Phi'(\rho)]^2}{\Phi''(\rho)}; \qquad \int_0^{\frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)}} F(z)dz \leqq \frac{\Phi^2(\sigma)}{\Phi(2\sigma)};$$

où ρ, σ sont des quantités positives quelconques, et $\Phi(t)$ est une fonction, déterminée, pour $t > 0$, par l'équation

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz}F(z)dz$$

et qui se réduit à ∞ pour $t = 0$. D'après ces formules on trouve aisément les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)dz$$

pour u quelconque, en donnant à ρ et σ des valeurs qui remplissent ces conditions:

$$-\frac{\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)} \leqq u; \qquad \frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)} \geqq u.$$

Pour appliquer ces formules à la détermination des limites, entre lesquelles reste comprise la somme de n premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$$

on prendra

$$\Phi(t) = A_0 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + A_3 e^{-3t} + \ldots,$$

et

$$u = n - 1.$$

En prenant

$$\Phi(t) = \frac{B_1}{1^t} + \frac{B_2}{2^t} + \frac{B_3}{3^t} + \frac{B_4}{4^t} + \ldots$$

et

$$u = \log n,$$

on trouvera les limites de la somme de n premiers coefficients de la série

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \frac{B_4}{4^x} + \ldots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant pour $\Phi(t)$ une série infinie

$$\frac{1}{1^{1+t}} + \frac{1}{2^{1+t}} + \frac{1}{3^{1+t}} + \frac{1}{5^{1+t}} + \frac{1}{7^{1+t}} + \ldots$$

composée seulement des nombres premiers, on obtiendra des formules pour évaluer les limites de la somme finie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{n}$$

d'après les séries infinies de la forme

$$\frac{1}{1^{1+t}} + \frac{1}{2^{1+t}} + \frac{1}{3^{1+t}} + \frac{1}{5^{1+t}} + \ldots.$$

$$\frac{\log 2}{2^{1+t}} + \frac{\log 3}{3^{1+t}} + \frac{\log 5}{5^{1+t}} + \frac{\log 7}{7^{1+t}} + \ldots.$$

$$\frac{\log^2 2}{2^{1+t}} + \frac{\log^2 3}{3^{1+t}} + \frac{\log^2 5}{5^{1+t}} + \frac{\log^2 7}{7^{1+t}} + \ldots$$

S:t Pétersbourg, $\frac{\text{20 Sept.}}{\text{2 Oct.}}$ 1886.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE CONVERGENZ DER REIHEN WELCHE ZUR DARSTELLUNG DER COORDINATEN DER PLANETEN ANGEWENDET WERDEN

VON

H. GYLDÉN
in STOCKHOLM.

In letzterer Zeit hat man mehrfach die Frage in Erwägung gezogen, ob die analytischen Ausdrücke, durch welche man bisher die Lösung des s. g. Dreikörperproblems dargestellt hat, auch eine wirkliche, für alle Zeiten gültige Lösung dieser Aufgabe repräsentiren, oder ob sie bloss während einer begränzten, wenn auch für practische Bedürfnisse hinreichend langen Zeit die Bewegungen mit der gewünschten Genauigkeit wiedergeben können; ob, mit anderen Worten, diese Ausdrücke eine genügende Einsicht in die Natur der Bewegungen zu gewähren im Stande sind, oder ob sie bloss den Dienst von Interpolationsformeln verrichten. Diese Frage lässt sich auch in folgender Weise ausdrücken: sind die Functionen, welche die Coordinaten der sich gegenseitig anziehenden Körper und ihre Geschwindigkeiten analytisch angeben, von der Beschaffenheit, dass sie sich in gleichförmig convergirenden trigonometrischen Reihen entwickeln lassen? Die erwähnten Functionen sind uns nun zwar zunächst völlig unbekannt, so dass an eine directe Beantwortung der vorgelegten Frage nicht zu denken ist; unsere Bemühungen müssen daher darauf gerichtet sein, zu einer annähernden Kenntniss jener Functionen zu gelangen, indem wir die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung

in einer Weise vereinfachen, welche uns eine wirkliche Annäherung und mithin eine beliebig genaue Lösung mittelst mehrerer auf einander folgenden Annäherungen erwarten lässt. Bei den bisherigen Versuchen das erwähnte Problem zu lösen hat man wohl auch immer, so oft es sich um ernstlich gemeinte Untersuchungen gehandelt hat, diesem Grundsatze zu genügen gesucht; bei der Feststellung der jedesmal vorzunehmenden Reduction ist es indessen bis jetzt kaum gelungen — weil die Lösung der Aufgabe mit zu grossen Schwierigkeiten verbunden war — den strengen Beweis dafür zu liefern, dass die eingeleitete Approximationsmethode wirklich dem richtigen Resultate entgegenführe. Hierzu wäre vor Allem nöthig, die Convergenz der successiven Annäherungen gesichert zu sehen. Convergiren aber die Reihenfolgen der Annäherungen nicht, so darf man selbstverständlich nicht aus einzelnen derselben irgend welche Schlüsse auf die analytische Form ziehen, durch welche die vollständige Lösung dargestellt werden kann.

Es lag nahe, bei den Bewegungsgleichungen der Planeten jene Vereinfachungen dadurch herbeizuführen, dass man in der ersten Annäherung bloss die Anziehung der Sonne berücksichtigte, in der zweiten die der störenden Planeten, aber bloss insofern diese den ersten Potenzen ihrer Massen proportional sind, u. s. w.; dass man mit einem Worte die successiven Annäherungen nach den Potenzen und Producten der Planetenmassen ordnete. Eine solche Anordnung der Annäherungen ist aber, wie man bei näherer Betrachtung bemerken wird, mit ganz wesentlichen Nachtheilen verknüpft. Man erhält nehmlich vor Allem Ausdrücke, welche die Zeit oder Potenzen der Zeit als Factoren enthalten und also beliebig anwachsen können; und von solchen Ausdrücken kann man nicht erwarten, dass sie die wahre Form der Integrale repräsentiren. Wenngleich man nun nachträglich auch derartige Factoren eliminiren, und demnach die reine trigonometrische Form herstellen kann, so hat das Resultat in theoretischer Hinsicht doch eine weniger tiefgehende Bedeutung, als wenn die reine trigonometrische Form sich unmittelbar ergeben hätte. Bei meinen Untersuchungen über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper habe ich mich daher bemüht, das Auftreten von Gliedern, welche mit der Zeit oder ihren Potenzen multiplicirt erscheinen, zu vermeiden.

Wenn aber auch die Entwicklung nach den Potenzen der störenden Kräfte nicht überall und durchgehend gestattet ist, so kann man sie

anderseits doch nicht auf jeder Stufe der Untersuchung vermeiden; es bleibt demnach zu entscheiden ob man, trotz derartigen Entwicklungen, doch Schlüsse hinsichtlich der absoluten Gültigkeit der in solcher Weise erlangten Lösung zu ziehen berechtigt ist. Um sogleich jeder Begriffsverwechselung in Betreff dieses Punktes vorzubeugen, muss ich mir hier die Bemerkung erlauben, dass ich in meinen früheren Arbeiten unter der Benennung »eine absolute Lösung» eine Lösung verstanden habe, die in jeder Beziehung innerhalb der Grenzen unseres empirischen Erkennens gültig ist. Wenn man überhaupt von einem absoluten Planetensysteme reden darf, so bezieht sich das Wort *absolut* offenbar auf die Erkenntniss der allgemeinen und beständig geltenden Gesetze der Bewegung und namentlich auf die Entscheidung über die Frage von der Stabilität des Systems. Es wäre aber hierbei völlig unberechtigt, eine gleiche Genauigkeit bei den durch Berechnung ermittelten Örtern der Planeten zu verschiedenen Zeiten verlangen zu wollen; denn wie genau auch die mittleren Bewegungen der Planeten durch Beobachtungen erkannt sein mögen, immer wird man doch Zeiträume angeben können, nach deren Verlauf die vorausberechneten Örter sich als um beliebige Grössen falsch erweisen müssen. Die Bewegungsausdrücke müssen aber so beschaffen sein, dass sie, durch Einsetzung verbesserter Werthe der Integrationsconstanten, die zu beliebigen Zeiten beobachteten Örter der Planeten völlig genau wiedergeben. Dass auch dieses zu leisten nur in beschränktem Maasse möglich ist, beruht auf Umständen, deren Erörterung nicht hierher gehört.

Was von einer absoluten Lösung des Problems der Planetenbewegungen gefordert werden muss, ist demnach:

1° dass die analytischen Ausdrücke der Coordinaten und der Geschwindigkeiten bei der numerischen Berechnung dieselbe Genauigkeit bei jedem Werthe der Zeit erlauben, ganz abgesehen davon, ob das Berechnungsresultat ohne Änderung der Integrationsconstanten mit den Beobachtungen übereinstimmt oder nicht;

2° dass der zu einem gegebenen Zeitpunkte durch Beobachtungen bestimmte Ort und die für denselben Zeitpunkt gefundene Geschwindigkeit durch die Berechnungsresultate innerhalb des Genauigkeitsgrades der Beobachtungen wiedergegeben werden.

Zu diesen beiden Punkten kommt noch ein dritter, welcher zwar gewissermassen schon im ersten enthalten ist, seiner Wichtigkeit wegen

aber doch besonders hervorgehoben werden muss. Punkt I könnte nehmlich scheinbar erfüllt sein, wenn z. B. die analytischen Ausdrücke für die Coordinaten und die Geschwindigkeiten aus lauter trigonometrischen Gliedern bestehen, und dabei die kleinsten eben auf der Grenze ständen, welche man für die Genauigkeit angenommen hätte. Man könnte nun, und zwar nicht ganz mit Unrecht meinen, die Reihe wäre wirklich gleichförmig convergent, denn die wirklich berechneten Glieder lassen sich in eine endliche Anzahl von Gruppen theilen, innerhalb welcher die einzelnen Glieder wie Potenzenreihen convergiren. Immerhin bleibt aber doch ein wirklicher Nachweis dafür sehr wünschenwerth, dass die Summe der vernachlässigten Glieder stets geringer bleibt als eine gegebene Grösse; und es ist die Forderung eines solchen Nachweises, welche ich als die dritte bezeichnen möchte, die erfüllt sein muss, damit die Lösung das Prädicat »absolut» verdiene.

Ich bin der Meinung gewesen, dass ein solcher Nachweis aus meinen früheren Untersuchungen ziemlich leicht hervorgehen würde, allein darin habe ich mich hinsichtlich eines gewissen Punktes getäuscht. Es erwiesen sich zum Theil ganz andere Betrachtungen erforderlich um über die Convergenzfrage einiges Licht zu werfen, als die, welche eine möglichst rapide und genaue Berechnung einzelner Ungleichheiten bezweckten. Anderseits liegt aber, so viel ich bis jetzt übersehen kann, kein Grund zu einer wesentlichen Abänderung in den Methoden vor, die ich früher zur Herstellung der analytischen Ausdrücke für die Coordinaten und die Geschwindigkeiten angegeben habe. Am allerwenigsten aber habe ich ein Indicium bemerken können, dass die von mir früher angewandten Reihen, welche im Wesentlichen mit den von Lagrange und Laplace eingeführten übereinstimmen, nicht convergiren. Das Resultat der Untersuchungen, von denen ich einen wesentlichen Theil hier vorlege, wird dieses bestätigen. Dasselbe bezieht sich auf die Convergenz einer gewissen Gattung von Gliedern, die ich *characteristische Glieder* nennen werde, weil sie nicht nur für die Bewegungsgesetze characteristisch sind, sondern auch die anzuwendende Berechnungsmethode bedingen. Von den vielen Gliedern, aus welchen die analytischen Ausdrücke der Coordinaten zusammengesetzt sind, ist es eine relativ geringe Anzahl, welche sich durch ihre Grösse unter den übrigen bemerklich machen und also die besonderen, für einen gegebenen Fall eigenthümlichen Bewegungsgesetze kennzeichnen. So ist z. B. die

Evection characteristisch für die Bewegung des Mondes und die Libration für die Bewegungen der drei inneren Jupitersmonde. Für die Bewegungen des Jupiter und des Saturn sind die grossen Ungleichheiten characteristisch, welche von der zweifachen Bewegung des Jupiter weniger der fünffachen des Saturn abhängen, und die kleinen Planeten bieten vielfache Beispiele zur Illustration von eigenthümlichen Fällen in der Theorie der Himmelsbewegungen. Glieder, welche solche Ungleichheiten darstellen, sind für die Theorie der Bewegung offenbar characteristisch, wodurch man veranlasst wird, dieselben einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, und dies um so mehr, als grade sie nebst den elementären Gliedern die einzigen sind, welche ernstliche Schwierigkeiten bereiten. Alle übrigen Glieder können leicht ermittelt werden und sind mit sehr wenigen Ausnahmen mehr als Correctionsgrössen anzusehen als eigentlich maassgebend für die Abstraction der Begriffe in Betreff der Gesetze der Bewegung.

In meinen früheren Arbeiten habe ich die Glieder, welche mit den störenden Massen nicht verschwinden sondern constante, endliche Werthe annehmen, *elementäre Glieder* genannt. In der jetzigen Abhandlung führe ich also die neue Benennung *characteristische Glieder* ein, und verstehe darunter alle die Glieder, welche die kleinsten, mit den störenden Massen nicht verschwindenden Integrationsdivisoren enthalten. — Es ist bekannt, dass diese Integrationsdivisoren näherungsweise aufgefunden werden, indem der Kettenbruch, welcher das Verhältniss der mittleren Bewegungen zweier Planeten darstellt, successive summirt wird und man die Differenzen aus den Näherungsbrüchen und dem strengen Werthe des erwähnten Verhältnisses bildet. Wären die mittleren Bewegungen streng commensurabel, so würde eine solche Differenz auch völlig verschwinden, wodurch indessen zunächst nur angezeigt würde, dass die Entwicklung, nach welcher man Integrationsdivisoren der besagten Form erhielte, nicht berechtigt war. Das Gesetz über das Vorkommen der elementären Glieder ist von ausserordentlich grosser Bedeutung für die Beurtheilung ihrer Convergenz. Wir müssen daher dieses Gesetz etwas näher beleuchten, zu welchem Zwecke ich zunächst an einige Sätze aus der Theorie der Kettenbrüche erinnere.

Soweit thunlich, werde ich mich bereits angenommener Bezeichnungen und Begriffe bedienen, und verstehe also unter n und n' die

mittleren Bewegungen zweier Planeten um die Sonne: für das Verhältniss beider adoptire ich die übliche Bezeichnung μ, und zwar so dass:

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

Unter der Voraussetzung dass μ eine irrationale Zahl bedeutet, können wir dieselbe durch einen unendlichen, convergenten Kettenbruch repräsentiren, nehmlich:

$$\mu = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}}$$

wobei a, a_1, ... ganze positive Zahlen bezeichnen. Sind nun, indem s_m und s'_m ebenfalls ganze positive Zahlen bezeichnen,

$$\frac{s}{s'}, \quad \frac{s_1}{s'_1}, \ldots$$

die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches, so sind die Differenzen:

$$\frac{s}{s'} - \mu; \qquad \frac{s_1}{s'_1} - \mu; \qquad \text{u. s. w.}$$

kleiner als irgend welche andere Differenzen des Verhältnisses μ von rationalen Brüchen, weil die $\frac{s}{s'}$, $\frac{s_1}{s'_1}$, ... sonst keine Näherungsbrüche wären. Es folgt hieraus, dass die Differenzen:

$$s - s'\mu, \qquad s_1 - s'_1\mu, \ldots$$

oder

$$sn - s'n', \qquad s_1 n - s'_1 n', \ldots$$

kleiner sind als alle andere Differenzen derselben Form, bei denen man für s, s', s_1, ... andere Zahlen einsetzte als die erwähnten Zähler und Nenner der Näherungsbrüche.

Die Werthe der ganzen Zahlen s, s', s_1, ... lassen sich sehr leicht ermitteln. Man hat zunächst:

$$s = 1; \qquad s' = a; \qquad s_1 = a_1; \qquad s'_1 = aa_1 + 1$$

und hiernach finden sich die folgenden mit Hülfe der Recursionsgleichungen:

$$s_m = a_m s_{m-1} + s_{m-2}$$

$$s'_m = a_m s'_{m-1} + s'_{m-2}$$

Auch die Näherungsbrüche lassen sich mittelst Recursionsformeln berechnen. Hierzu dient vor Allem die Gleichung:

$$\frac{s_{m+1}}{s'_{m+1}} - \frac{s_m}{s'_m} = -\frac{s'_{m-1}}{s'_{m+1}}\left[\frac{s_m}{s'_m} - \frac{s_{m-1}}{s'_{m-1}}\right]$$

Da nun überdies die Anfangswerthe:

$$\frac{s}{s'} = \frac{1}{s'}; \qquad \frac{s_1}{s'_1} = \frac{a_1}{aa_1 + 1} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{aa_1 + 1}\right) = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1}$$

gelten, so ist Alles gegeben, um die betreffenden Grössen nach und nach zu berechnen und man kann sie auch durch die Form einer Summe von rationalen Brüchen, in denen der Zähler immer 1 ist, darstellen. Man findet mit Hülfe obiger Formeln sehr leicht die Werthe:

$$\frac{s_2}{s'_2} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2}$$

$$\frac{s_3}{s'_3} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2} - \frac{1}{s'_2 s'_3}$$

u. s. w.

und lässt man den Index m oder die Anzahl der Glieder unendlich wachsen, so findet man die unendliche convergente Reihe:

$$\mu = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2} - \ldots$$

Mit Hülfe der soeben angeführten Entwicklungen findet sich nun:

$$\frac{s_m}{s'_m} - \mu = (-1)^m \left\{\frac{1}{s'_m s'_{m+1}} - \frac{1}{s'_{m+1} s'_{m+2}} + \ldots\right\}$$

oder:

$$s_m - s'_m \mu = (-1)^m \left\{\frac{1}{s'_{m+1}} - \frac{s'_m}{s'_{m+1} s'_{m+2}} + \ldots\right\},$$

aus welcher Gleichung unmittelbar zu ersehen ist, dass eine Differenz der Form $s_m - s'_m \mu$ nur dann einen sehr kleinen Werth erhalten kann, wenn der Nenner des auf $\frac{s_m}{s'_m}$ folgenden Näherungsbruches sehr gross wird, d. h. wenn die beiden auf einander folgenden Näherungsbrüche sehr weit von einander liegen. Weil nun diese Differenzen, wenigstens näherungsweise und bevor sie unter eine gewisse Grenze sinken, auch die Werthe der Integrationsdivisoren repräsentiren, so schliesst man aus dem gefundenen Ausdrucke, dass wenn ein characteristisches Glied sehr gross wird, so liegt das folgende sehr weit entfernt. Diese Schlussfolgerung muss jedoch eine Modification erleiden, weil einem gegebenen Paare s_m, s'_m, als Indices betrachtet, immer eine ganze Gruppe von Gliedern angehört, bei denen die Bewegungen der Argumente von einander nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind. Zu diesem Umstande werden wir sogleich zurückkommen, vorher aber noch eine Bemerkung hinsichtlich der Convergenz der Reihen:

$$\frac{\varepsilon}{s} + \frac{\varepsilon_1}{s_1} + \frac{\varepsilon_2}{s_2} + \frac{\varepsilon_3}{s_3} + \ldots$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{s'} + \frac{\varepsilon_1}{s'_1} + \frac{\varepsilon_2}{s'_2} + \frac{\varepsilon_3}{s'_3} + \ldots$$

einfliessen lassen, bei denen die ε Grössen bezeichnen, die beliebige Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen können. Es ist nun in der That sehr leicht die Convergenz dieser Reihen nachzuweisen und dadurch einen Satz zu erhalten, welcher bei den folgenden Untersuchungen von der grössten Bedeutung sein wird.

Aus den beiden Gleichungen:

$$s_{m+1} = a_m s_m + s_{m-1}$$

$$s_m = a_{m-1} s_{m-1} + s_{m-2}$$

folgt augenblicklich:

$$s_{m+1} = (a_m a_{m-1} + 1) s_{m-1} + a_m s_{m-2}$$

oder

$$\frac{s_{m+1}}{s_{m-1}} = a_m a_{m-1} + 1 + a_m \frac{s_{m-2}}{s_{m-1}}$$

Weil nun die a_m nicht minder als die s_m ganze positive Zahlen sind, so ist offenbar bei jedem Werthe von m:

$$\frac{s_{m+1}}{s_{m-1}} > 2$$

Es ergiebt sich hieraus sofort, dass die Reihe:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_4} + \ldots$$

stärker convergirt als eine nach den Potenzen von $\frac{1}{2}$ laufende Entwicklung, und dasselbe gilt auch von der Reihe:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_5} + \ldots$$

Von der Summe dieser Reihen lässt sich aber sagen, dass sie durchschnittlich stärker convergirt als eine nach den steigenden Potenzen von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ geordnete Reihe. Aus der Convergenz dieser Summe folgt offenbar auch die der oben angeführten Reihen.

Die Werthe der Integrationsdivisoren haben bei der absoluten Lösung die Form:

$$s_m n - s'_m n' + n\sigma_m,$$

wobei σ_m einen Factor von der Ordnung der störenden Massen bezeichnet. Wollte man auf eine absolute Lösung überhaupt verzichten und mithin eine durchgehende Entwicklung nach den Potenzen der störenden Massen als zulässig erachten, so wäre das Glied $n\sigma_m$ in den Argumenten ganz bei Seite zu lassen. Die Inconvenienzen eines solchen Verfahrens liegen aber zu offen am Tage um unberücksichtigt bleiben zu können; dasselbe würde Integrationsdivisoren, die in Wirklichkeit nicht unter einer gegebenen Grösse von der Ordnung $n\sigma_m$ wären, als beliebig klein erscheinen lassen, und anderseits für streng verschwindende Werthe von oben bezeichneten Differenzen endliche Grössen ergeben. In Fällen, die ich als critisch bezeichnen möchte, würden demnach die Integrationsdivisoren gänzlich entstellt gefunden werden; und die nothwendige Folge davon würde die Unmöglichkeit sein, die mittleren Bewegungen richtig zu bestimmen.

Hinsichtlich der oben näher bezeichneten Differenz haben wir noch eine Bemerkung hervorzuheben, auf welche bei der folgenden Darstellung Bezug genommen werden soll. Wenn das Glied $n\sigma_m$ eine Grösse von der Ordnung der störenden Kräfte ist, so wird die Kleinheit der besagten Differenz wesentlich durch die Glieder:

$$s_m n - s'_m n'$$

bedingt. Man schliesst hieraus, da n und n' nicht als kleine Grössen anzusehen sind, dass die Differenzen $s_m n - s'_m n'$ und $s_m n - s'_m n' + n\sigma_m$ für dieselben Werthe der ganzen Zahlen s_m und s'_m ihre kleinsten Werthe erhalten, wiewohl diese relativ sehr verschieden sein können. Das Vorhandensein des Gliedes $n\sigma_m$ bedingt also im Allgemeinen, d. h. so lange dasselbe als eine kleine Grösse neben n oder n' anzusehen ist, keine Änderung in der Lage der characteristischen Glieder.

Die Grössen σ_m sind im Probleme der drei Körper aus drei oder vier Theilen zusammengesetzt und sind dabei durch Ausdrücke der Form:

$$\sigma_m = p\varsigma + p'\mu\varsigma' + q\tau + q'\mu\tau'$$

gegeben. Die Grössen p, p', q und q' bezeichnen hier ganze Zahlen und ς, ς', τ und τ' kleine Quantitäten von der Ordnung der störenden Kräfte. Es leuchtet ein, dass σ_m nur dann mit n oder n' vergleichbare Werthe annehmen kann, wenn eine oder einige der bezeichneten ganzen Zahlen sehr grosse Werthe erhalten. In solchen Fällen könnte allerdings eine Verschiebung in der Lage eines characteristischen Gliedes stattfinden, aber eine relativ doch nur sehr geringe. Dieser Umstand bleibt ohne jeden wesentlichen Einfluss auf unsere folgenden Betrachtungen.

Die ganzen Zahlen p, p', q, q' nehmen bei jedem Paare s_m, s'_m sehr verschiedene Werthe an und hieraus folgt, dass mehrere Argumente derselben Form vorhanden sind, bei denen s_m und s'_m dieselben Werthe haben. Diese Coexistenz verschiedener Glieder, von denen mehrere Coefficienten derselben Ordnung sind, bewirkt eine erhebliche Complication der ganzen Untersuchung ohne jedoch der Lösung wesentlich hinderlich zu sein; wir können sogar bei den meisten Schritten, welche uns der Lösung unserer Aufgabe nähern, zunächst ganz davon absehen, dass mehrere Glieder neben einander coordonirt sind, und haben alsdann bloss ein einziges

Glied bei jedem Paare s_m, s'_m zu betrachten, wobei wir dasjenige als ausgewählt ansehen, bei dem die Differenz:

$$s_m n - s'_m n' + n\sigma_m$$

einen kleineren Werth hat als die übrigen, demselben Paare s_m, s'_m entsprechenden, aber von andern σ_m-Werthen abhängigen Differenzen.

I.

Eine jede Methode zur Auflösung des Problems der drei Körper setzt ein besonderes, aus den bekannten Differentialgleichungen der Dynamik abgeleitetes Gleichungssystem voraus, welches gewöhnlich mit besonderer Rücksicht auf eine bequeme numerische Anwendung und compendiöse Darstellung des Resultats aufgesucht worden ist. Die Untersuchungen aber, die auf den folgenden Blättern mitgetheilt werden, sind nicht nur von der besondern Form der zu Grunde gelegten Differentialgleichungen unabhängig, sondern gestalten sich auch nahezu in derselben Weise, wenn man die Zeit selbst, oder statt dieser eine von der Zeit in gegebener Weise abhängige Function als unabhängige Veränderliche anwendet. Da in dieser Hinsicht die Wahl also frei steht, so werde ich die für eine einfache und leicht verständliche Darstellung möglichst günstigen Bestimmungen adoptiren, und demgemäss die Zeit als unabhängige Veränderliche feststellen, sowie die einfache, in der *mécanique céleste* gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch deren Integration die mittlere Anomalie gefunden wird, der ganzen Untersuchung zu Grunde legen.

Für die mittleren Anomalien des gestörten und des störenden Körpers wenden wir die in der *mécanique celeste* adoptirten Bezeichnungen an, nehmlich ζ und ζ'; indem wir überdies mit A, A_1, ... constante Coefficienten, von der Ordnung der störenden Masse bezeichnen, sowie mit B_1, B_2, ... constante Winkelgrössen, stellen wir die besagte Differentialgleichung wie folgt dar:

$$(1)\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) - \ldots + M$$

wobei wir in der Function M sämmtliche nicht-characteristische Glieder vereinigt denken.

Wir wollen nun noch eine Vereinfachung eintreten lassen, die zwar an und für sich den Resultaten eine grosse Beschränkung auferlegt, für die Untersuchung der Convergenzfrage jedoch, soweit diese sich auf die characteristischen Glieder bezieht, ohne Einfluss zu sein scheint. Diese Vereinfachung besteht in der Vernachlässigung aller von der Masse des gestörten Körpers abhängigen Glieder. — Abgesehen davon, dass es in der Natur vielfache Fälle giebt, wo die Masse des gestörten Körpers zweifellos eine verschwindend kleine Grösse ist, gelangt man in vielen Punkten zu wirklichen Annäherungen, indem man die Glieder, welche von den beiden Massen abhängen, gesondert betrachtet. Wo dies aber nicht der Fall ist, kann man mit wenigen Ausnahmen die Aufgabe auf die Integration von Differentialgleichungen zurückführen, welche dieselbe Form mit denen haben, die man nach Vernachlässigung der Masse des gestörten Körpers erlangt haben würde.

Das Resultat, welches durch die Integration der Gleichung (1) erhalten wird, hat nun voraussichtlich die Form:

$$\zeta = c + nt + \omega,$$

bei der wir durch c und n die beiden Integrationsconstanten bezeichnen, nehmlich durch c die Constante der mittleren Anomalie und durch n die mittlere Bewegung. Die Function ω bezeichnet eine Summe periodischer Glieder, welche Summe wir sogleich in zwei Theile zerlegen wollen, indem wir setzen:

$$\omega = Z + \partial\zeta$$

Wir setzen dabei voraus, dass die Function Z alle characteristischen Glieder umfasst, wenigstens alle solche, die sich bei der Integration als critisch erweisen; das Increment $\partial\zeta$ aber alle übrigen. Dieser Bestimmung zufolge können wir annehmen, dass die Glieder, welche die Function $\partial\zeta$ constituiren, leicht zu ermitteln sind, oder dass die Gleichung:

$$\frac{d^2\partial\zeta}{dt^2} = M$$

ohne jegliche Schwierigkeit integrirt werden kann, soweit man nicht bei

den fortgesetzten Annäherungen Glieder erhalten würde, welche der Form nach den characteristischen Gliedern angehören und demnach der Function Z einverleibt werden sollten. Anderseits würde man bei fortgesetzter Annäherung durch Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - \ldots$$

Glieder finden, die mit denen der Function $\delta\zeta$ zu vereinigen wären. Wenn man daher die Gleichung (1) in zwei andere zerspaltet, von denen die eine Z und die andere δz geben soll, so muss der einen eine Function hinzugefügt werden, die wieder von der anderen abgezogen wird, und welche die Überführung gewisser Glieder von der einen Gleichung zur anderen vermittelt. Indem wir diese Function durch N bezeichnen haben wir also die Gleichungen:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma' nt + B_1)$$

$$- \ldots + N$$

$$\frac{d^2\delta\zeta}{dt^2} = M - N$$

und die Summe beider vertritt offenbar die Gleichung (1). Von der zweiten dieser Gleichungen können wir nun sicher annehmen, dass ihre Integration keine Schwierigkeiten verursachen wird, und werden wir uns daher nicht weiter mit derselben befassen, sondern die Function $\delta\zeta$ sogleich als eine bekannte Grösse ansehen. — Hinsichtlich der ersten der obigen Gleichungen heben wir hervor, dass die aus N entstehenden Glieder mit den übrigen einfach vereinigt werden können, wodurch die Coefficienten um kleine Grössen geändert werden. Derartige Incremente sind für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich; sie können überdies aber als in den betreffenden Coefficienten bereits einverleibt gedacht werden, so dass wir bei unseren Untersuchungen von der Gleichung

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - \ldots, \tag{2}$$

bei der die Function N einfach weggelassen worden ist, ausgehen können.

Diese Gleichung integriren wir nun in der gewöhnlichen Weise, indem wir Z, soweit diese Function in den Argumenten rechter Hand vorkommt, als constant ansehen und für ζ' den Werth $c' + n't$ annehmen. Wir erhalten dabei, da hier keine Integrationsconstante hinzugefügt zu werden braucht,

$$(3) \qquad \frac{dZ}{dt} = \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma n} \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)$$

$$+ \frac{n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n} \cos(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots + F;$$

und ist die Function F hier offenbar eingeführt worden, damit die rechte Seite das strenge Integrationsresultat ausdrücken soll. Um diese Function zu bestimmen, differentiiren wir die Gleichung (3) und erhalten hierauf unter Berücksichtigung der Gleichung (2):

$$(4) \qquad 0 = -\left\{ \frac{sn^2 A}{sn - s'n' + \sigma n} \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) \right.$$

$$\left. + \frac{s_1 n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n} \sin(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots \right\} \frac{dZ}{dt} + \frac{dF}{dt}$$

Indem in dieses Resultat der Werth von $\frac{dZ}{dt}$ aus (3) eingesetzt wird, erhält man eine Gleichung, aus der die Function F durch fortgesetzte Annäherungen zu bestimmen ist. Diese Bestimmung wird nun zwar nicht immer gelingen, aber derartige Fälle erheischen überhaupt eine andere Integrationsmethode als die, welche wir bei der Gleichung (2) eingeleitet haben.

Die Gleichung (3) integriren wir nun in derselben Weise, wie wir jene aus der Gleichung (2) herleiteten, d. h. indem wir die Function Z in den Argumenten als constant ansehen. Auch hier braucht man keine Integrationsconstante hinzuzufügen, weil dieselbe als mit c zusammenfallend gedacht werden kann. Dem sich unmittelbar ergebenden Resultate fügen wir aber, ebenso wie bei der ersten Integration, eine Function, F_1 hinzu, welche wir nachher so bestimmen müssen, dass der Differentialgleichung (2) strenge genügt wird.

Es ergiebt sich in solcher Weise:

$$(5) \qquad Z = \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)$$

$$+ \frac{n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)^2} \sin(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots + F_1 + \int F dt$$

Nachdem wir diese Gleichung differentiirt, und das Resultat mit dem, durch die Gleichung (3) gegebenen Werthe von $\frac{dZ}{dt}$ identificirt haben, erhalten wir:

$$(6) \qquad 0 = \left\{ \frac{sn^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) \right.$$

$$\left. + \frac{s_1 n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 B)^2} \cos(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots \right\} \frac{dZ}{dt} + \frac{dF_1}{dt}$$

Aus dieser Bedingung wäre die Function F_1 zu bestimmen; wir werden aber die hierauf bezügliche Untersuchung zunächst bei Seite lassen, ebenso wie wir die Bestimmung von F nicht näher berücksichtigten. Unsere nächsten Betrachtungen betreffen nehmlich die Frage von der Convergenz der Entwicklung von Z, wie diese durch die Gleichung (5) angegeben wird, indem die von F und F_1 abhängigen Glieder unberücksichtigt gelassen werden. Es genügt hierbei die Bemerkung, dass in der Mehrzahl der Fälle, wie sie überhaupt vorkommen können, die Functionen F und F_1 Grössen zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte sind, so dass die von diesen Functionen unabhängigen Glieder in den Gleichungen (3) und (5) genäherte Werthe von $\frac{dZ}{dt}$ und Z ergeben.

Betrachten wir nun die Convergenz der Reihe (3) als eine rein algebraische Frage, d. h. losgelöst von allen Bedingungen astronomischer Natur, so werden wir bald inne, dass wir auf dieselbe keine bestimmte Antwort finden können. Es zeigt sich nehmlich, dass es Werthsysteme von n und n' geben kann, bei welchen die betreffende Reihe convergent ist, dagegen aber auch andere Werthsysteme, welche sicher die Divergenz derselben Reihe bedingen. Um dies nachzuweisen müssen wir die Grössenordnungen der Coefficienten A, A_1, ... zur Evidenz bringen. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit M_m einen Factor von der Ordnung der

störenden Masse, mit α und e aber Grössen, von denen die erste das constante Verhältniss der mittleren Entfernungen bezeichnet, und zwar so, dass α immer kleiner als die Einheit angenommen wird, und e als von derselben Grössenordnung wie die Excentricitäten oder die gegenseitige Neigung angesehen wird. Die Coefficienten A_m sind nun hinsichtlich ihrer Grössenordnung durch die Formel:

$$A_m = M_m \alpha^{s_m} e^{s'_m - s_m}.$$

gegeben indem wir voraussetzen, dass:

$$s'_m > s_m$$

Für den entsprechenden Integrationsdivisor kann man, dem jetzigen Zwecke entsprechend, den genäherten Werth:

$$s_m n - s'_m n' = \pm \frac{n}{s'_{m+1}}$$

anwenden, indem man nehmlich das Glied $\sigma_m n$ als verschwindend klein ansieht. Es ergiebt sich nun:

$$\frac{dZ}{dt} = - s'_1 n M \alpha^s e^{s'-s} \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma n t + B)$$

$$+ s'_2 n M_1 \alpha^{s_1} e^{s'_1 - s_1} \cos(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 n t + B_1) + \ldots;$$

und weil s'_1 beliebig gross im Verhältniss zu s und s' sein kann, s_2 im Verhältniss zu s_1 und s'_1, u. s. w., so können diese Zahlen Werthe haben, welche die Divergenz der obigen Reihe bedingen. Sie können aber anderseits Werthe haben, bei denen die Reihe sicher convergirt. In noch höherem Grade tritt die Bedingung der Divergenz oder Convergenz bei der Reihe für Z selbst hervor, indem die Glieder dieser die Quadrate der Zahlen s'_1, s'_2, ... als Factoren enthalten.

Betrachtungen, wie die obigen gehören aber unserer Aufgabe gar nicht an, denn nicht sowohl die Integrationsconstanten n und c, als vielmehr die zu einem bestimmten Zeitpunkte stattfindenden Werthe von $\frac{d\zeta}{dt}$ und ζ, dürfen in derselben als gegebene Grössen angesehen werden, weil diese direct mittelst Beobachtungen gefunden werden können. Unsere

Aufgabe ist im Gegentheil die, aus den für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. für $t = 0$ gültigen Werthen von $\frac{d\zeta}{dt}$ und ζ, welche durch n_0 und c_0 bezeichnet sein mögen, die Werthe von n und c zu bestimmen. Es wird sich dabei erweisen, dass letztere Grössen keineswegs immer synectische Functionen der ersteren sind, denn es kann unendlich viele Werthsysteme von n_0 und c_0 geben, welche dieselben Werthe von n und c bedingen. In diesen Fällen würden letztere Grössen nicht mehr den Character von willkürlichen Constanten haben, sondern zwei andere Grössen als solche eintreten.

Weil nun:

$$\zeta = c + nt + Z + \delta\zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = n + \frac{dZ}{dt} + \frac{d\delta\zeta}{dt}$$

und wir die Grössen $\delta\zeta$ und $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ als bekannt ansehen und ihre Werthe für $t = 0$ demnach sogleich als in c_0 und n_0 berücksichtigt denken können, so haben wir:

$$(7) \qquad n_0 = n + \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma n} \cos(sc_0 - s'c' + B) + \frac{n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n} \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) + \ldots$$

$$(8) \qquad c_0 = c + \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \sin(sc_0 - s'c' + B) + \frac{n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)^2} \sin(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) + \ldots$$

Aus diesen Gleichungen sieht man sogleich, dass die Grösse c sich unmittelbar ergiebt, wenn einmal n gefunden worden ist: die Bestimmung dieser Grösse ist aber mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden.

Das Resultat, welches durch die Lösung der Gleichung (7) in Bezug auf n erhalten wird, fingiren wir zunächst, indem wir die nachstehende Gleichung aufstellen:

$$(9) \qquad n = n_0 - ng\sqrt{\frac{A}{s}} - ng_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} - \ldots$$

oder:

$$n\left(1 + g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) = n_0;$$

unsere Aufgabe ist hiermit auf die Bestimmung der Grössen g_1, g_2, ... zurückgeführt.

Durch Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) ergeben sich für die g_m sofort folgende Ausdrücke:

$$(10)\quad\begin{cases} g = \dfrac{n\sqrt{sA}}{sn - s'n' + \sigma n}\cos(sc_0 - s'c' + B) \\ g_1 = \dfrac{n\sqrt{s_1 A_1}}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n}\cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die g_m nun zwar bestimmt, aber noch nicht ermittelt, weil die Glieder rechter Hand die noch unbekannte Grösse n enthält. In den meisten Fällen, die in unserem Sonnensysteme vorkommen, würde man zwar die betreffenden Grössen durch Annäherungen ermitteln können, allein bei gewissen Werthen der bekannten Grössen würde ein solches Verfahren versagen und kann auch nicht die Natur der betreffenden Grössen aufdecken.

Statt der noch unbekannten Integrationsdivisoren führe ich jetzt andere Grössen ein, welche einen leichteren Überblick über die Natur der Resultate gestattet; ich setze:

$$(11)\quad\begin{cases} sn - s'n' + \sigma n = n(2f - g)\sqrt{sA} \\ s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n = n(2f_1 - g_1)\sqrt{s_1 A_1} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Man bemerkt leicht, dass in gewöhnlich vorkommenden Fällen, wo die Integrationsdivisoren keine exceptionell kleinen Werthe annehmen, die Grössen f_m von der Ordnung $\dfrac{1}{s'_{m+1}\sqrt{s_m A_m}}$ und die Grössen g_m von der Ordnung $s'_{m+1}\sqrt{s_m A_m}$ sind; die letzteren haben daher in gewöhnlich vorkommenden Fällen Werthe, die wesentlich kleiner als 1 sind.

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke (11) erhält man aus (10) die Gleichungen:

$$g = \frac{\cos(sc_0 - s'c' + B)}{2f - g}$$

$$g_1 = \frac{\cos(s_1 c_0 - s_1' c + B_1)}{2f_1 - g_1}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die g_m durch die f_m ausdrücken, und zwar erhält man:

(12) $$g_m = f_m \mp \sqrt{f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s_m' c' + B_m)},$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden ist, jenachdem f_m positiv oder negativ ist. — Ferner ist:

$$2f_m - g_m = f_m \pm \sqrt{f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s_m' c' + B_m)}$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes finden sich aus den Gleichungen (10) Werthe der Integrationsdivisoren, womit folgende Entwicklungen für n und c erhalten werden:

(13) $$n_0 = n \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\frac{A}{s}}\cos(sc_0 - s'c' + B)}{f \pm \sqrt{f^2 - \cos(sc_0 - s'c' + B)}} + \frac{\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}\cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}{f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}} + \dots \right\}$$

(14) $$c_0 = c + \frac{\sin(sc_0 - s'c' + B)}{s\left[f \pm \sqrt{f^2 - \cos(sc_0 - s'c' + B)}\right]^2} + \frac{\sin(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}{s_1\left[f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}\right]} + \dots$$

Man bemerkt leicht, wenn man sich der oben gemachten Voraussetzung hinsichtlich der doppelten Vorzeichen erinnert, dass diese beiden Reihen immer convergent sind, wenn von den f_m kein einziger kleiner als 1 wird. Sie können aber auch bei kleineren, oder gar verschwindenden Werthen

von den f_m convergiren, wenn nur die Winkel $s_m c_0 - s'_m c' + B_m$ gewissen Bedingungen genügen. Statt diese aufzusuchen werden wir die betreffenden Reihen in einer Weise umformen, dass die Convergenz derselben sich leichter übersehen lässt.

Wir ersetzen die f_m durch andere Grössen k_m indem wir die Relation:

$$(15) \qquad f_m^2 + \left(\sin\frac{1}{2}(s_m c_0 - s'_m c' + B_m)\right)^2 = \frac{1}{k_m^2}$$

feststellen. Überdies setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(s_m c_0 - s'_m c' + B_m) = D_m$$

und erhalten nun:

$$f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s'_m c' + B_m) = \frac{1 - k_m^2 \cos D_m^2}{k_m^2}$$

$$f_m^2 = \frac{1 - k_m^2 \sin D_m^2}{k_m^2}$$

Hiermit finden sich:

$$g_m = \frac{\sqrt{1 - k_m^2 \sin D_m^2} - \sqrt{1 - k_m^2 \cos D_m^2}}{k_m}$$

$$2f_m - g_m = \frac{\sqrt{1 - k_m^2 \sin D_m^2} + \sqrt{1 - k_m^2 \cos D_m^2}}{k_m};$$

und die Reihen (13) und (14) nehmen nun die folgende elegante Gestalt an:

$$(16) \qquad n_0 = n\left\{1 + \frac{k\sqrt{\frac{A}{s}}\cos 2D}{\sqrt{1 - k^2 \sin D^2} + \sqrt{1 - k^2 \cos D^2}}\right.$$

$$\left. + \frac{k_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}\cos 2D_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin D_1^2} + \sqrt{1 - k_1^2 \cos D_1^2}} + \ldots\right\}$$

$$(17) \qquad c_0 = c + \frac{k^2 \sin 2D}{s\left[\sqrt{1 - k^2 \sin D^2} + \sqrt{1 - k^2 \cos D^2}\right]^2}$$

$$+ \frac{k_1^2 \sin 2D_1}{s_1\left[\sqrt{1 - k_1^2 \sin D_1^2} + \sqrt{1 - k_1^2 \cos D_1^2}\right]^2} + \ldots$$

Man sieht an diesen Entwicklungen sofort, dass sie convergent sind, so lange keine der Grössen k_m der Einheit übersteigt, und hieraus folgt auch die Convergenz der Reihen (3) und (5) abgesehen von den mit F und F_1 bezeichneten Gliedern. Bei diesem Resultate bleiben wir vorläufig stehen und wenden uns zunächst an die Bestimmung der Grössen g_m.

Von den wahren Integrationsdivisoren, welche durch die Gleichungen (11) bestimmt sind, unterscheiden wir die apparenten Integrationsdivisoren, deren Werthe man auf Grund von Beobachtungen unmittelbar kennt, oder doch als bekannt annehmen kann. Diese Divisoren werden mit dem Werthe n_0 in derselben Weise zu berechnen sein, wie die wahren mit dem Werthe n; sie sind daher durch den folgenden Algorithmus gegeben:

$$(18)\quad \begin{cases} sn_0 - s'n' + \sigma n_0 = n_0 e = n\sqrt{sA}\,(2f - g) - (s + \sigma)(n - n_0) \\ s_1 n_0 - s_1' n' + \sigma_1 n_0 = n_0 e_1 = n\sqrt{s_1 A_1}(2f_1 - g_1) - (s_1 + \sigma_1)(n - n_0) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Indem wir uns der Relation (9) erinnern, können wir diese Gleichungen auf die nachstehende Form bringen:

$$e = \sqrt{sA}(2f - g) + (s + \sigma - e)\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right)$$

$$e_1 = \sqrt{s_1 A_1}\,(2f_1 - g_1) + (s_1 + \sigma_1 - e_1)\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s}} + \ldots\right)$$

u. s. w.

In diesen Gleichungen ersetzen wir die Differenz $2f_m - g_m$ durch den Werth:

$$\frac{\cos 2D_m}{g_m}$$

und beachten die Relation:

$$s_m + \sigma_m - e_m = s'_m \frac{n}{n}:$$

es findet sich alsdann, indem wir die Bezeichnung:

$$\alpha_m = \sqrt{s_m A_m}\cos 2D_m$$

anwenden, das System:

$$(19)\qquad \left|\begin{array}{l} e = \dfrac{a}{g} + \dfrac{s'n'}{n_0}\left(g\sqrt{\dfrac{A}{s}} + g_1\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) \\ e_1 = \dfrac{a_1}{g_1} + \dfrac{s_1'n'}{n_1}\left(g\sqrt{\dfrac{A}{s}} + g_1\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Zwischen zwei und zwei dieser Gleichungen können wir die Reihe:

$$g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots$$

eliminiren, und erhalten dann Relationen zwischen zwei g_m-Werthen. Dabei bezeichnen wir durch r und r' zwei beliebige Indices und setzen:

$$E_{r,r'} = e_r s'_{r'} - e_{r'} s'_r$$

Das Eliminationsresultat wird nun:

$$E_{r,r'} = \frac{a_r s'_{r'}}{g_r} - \frac{a_{r'} s'_r}{g_{r'}}$$

oder:

$$(20)\qquad g_{r'} = \frac{a_{r'} s'_r g_r}{a_r s'_{r'} - E_{r,r'} g_r}$$

Lassen wir in dieser Formel den Index r' die Werthe der ganzen positiven Zahlen, inclusive Null, annehmen, und substituiren wir die in solcher Weise erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten g, g_1, g_2, ... als Functionen von g_r in die Gleichung:

$$e_r = \frac{a_r}{g_r} + s'_r\frac{n'}{n_0}\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right),$$

so findet sich:

$$(21)\qquad e_r = \frac{a_r}{g_r} + s_r'^2\frac{n'}{n_0}\left|\frac{a g_r\sqrt{\dfrac{A}{s}}}{s'a_r - E_{r,0}g_r} + \frac{a_1 g_r\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}}}{s_1'a_r - E_{r,1}g_r} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{a_{r-1}g_r\sqrt{\dfrac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s'_{r-1}a_r - E_{r,r-1}g_r} + \frac{1}{s'_r}g_r\sqrt{\frac{A_r}{s_r}} + \frac{a_{r+1}g_r\sqrt{\dfrac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s'_{r+1}a_r - E_{r,r+1}g_r} + \ldots\right|$$

Diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche unserer Aufgabe entspricht, erhält man sehr häufig leicht genug durch Annäherungen, indem man von dem Werthe:

$$g_r = \frac{a_r}{e_r - s_r' \frac{n'}{n_0}\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots + g_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}\right)}$$

ausgeht. Hat aber e_r einen solchen Werth, dass der Nenner dieses Ausdruckes sehr klein werden kann, so versagt die angedeutete Methode. Solche Fälle sind es eben, die wir jetzt etwas näher betrachten wollen. Vor Allem müssen wir den Werth von $E_{r,r'}$ etwas näher untersuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem oben gegebenen Ausdrucke für diese Grösse die Werthe:

$$e_r = s_r - s_r' \frac{n'}{n_0} + \sigma_r; \qquad e_{r'} = s_{r'} - s_{r'}' \frac{n'}{n_0} + \sigma_{r'}$$

und erhalten somit:

$$(22) \qquad E_{r,r'} = s_r s_{r'}' - s_{r'} s_r' + s_{r'}' \sigma_r - s_r' \sigma_{r'}$$

Hieraus schliessen wir unmittelbar, dass in der Regel $E_{r,r'}$ keine kleine Grösse bedeutet. Die Differenz $s_r s_{r'}' - s_{r'} s_r'$ ist nehmlich eine ganze Zahl während die folgenden Glieder eine irrationale Grösse bezeichnen, deren Werth nur in Ausnahmefällen einer ganzen Zahl sehr nahe kommen kann. Derartige Fälle können aber offenbar nur bei sehr grossen Werthen von r oder r' eintreten, d. h. nur wenn $\frac{1}{s_r}$ oder $\frac{1}{s_r'}$ als Grössen von der Ordnung der störenden Kraft anzusehen sind, woraus folgt, dass der entsprechende Coefficient A_r oder $A_{r'}$ eine äusserst kleine Grösse bedeutet.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall dar, wo der Gleichung:

$$s_r - s_r' \mu + \sigma_r = 0$$

streng genügt wird. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus der Gleichung (22) den Werth:

$$E_{r,r'} = - s_r'(s_{r'} - s_{r'}' \mu + \sigma_{r'});$$

die E-Coefficienten sind demnach den wahren Integrationsdivisoren pro-

portional, wenn ein einziger dieser Divisoren verschwindet, und diese Regel gilt auch für $E_{r, r}$ weil

$$E_{r, r} = 0$$

So bald:

$$r' > r.$$

hat man auch nothwendig:

$$|s_{r'} - s'_{r'}\mu| < |\sigma_r|;$$

und bei wachsendem r' wird die Differenz $s_{r'} - s'_{r'}\mu$ immer kleinere Werthe annehmen, so dass die Grösse $E_{r, r'}$ nach und nach auf das Glied: $-s'_{r'}\sigma_{r'}$ reducirt wird.

Der Coefficient $\sigma_{r'}$ ist nun in der Regel eine Grösse von derselben Ordnung wie $\frac{s_{r'}}{s_r}\sigma_r$, also von der Ordnung eines Productes aus der störenden Masse mit der Zahl $s_{r'}$. Da aber unserer Voraussetzung nach:

$$\sigma_r = -(s_r - s'_r\mu) = \pm\frac{1}{s_{r+1}} + \ldots$$

so ist das Product $\sigma_r s_{r+1}$ und noch mehr die folgenden Producte: $\sigma_r s_{r+2}, \ldots$ als Grössen nullter Ordnung oder sogar als grosse Zahlen anzusehen. Fälle, wo unter den Coefficienten $\sigma_{r'}$ sehr kleine Werthe vorkommen, sind nun allerdings nicht undenkbar, müssen aber als Ausnahmefälle angesehen werden, weil sie, wie man sich leicht überzeugen kann, äusserst unwahrscheinlich sind.[1] Wenn aber die späteren Divisoren auch nur den Betrag von Grössen der Ordnung σ hätten, so wären doch die Coefficienten:

$$\frac{a_{r'}}{\sigma^2}$$

[1] Man kann sich das betreffende Glied abgesehen von den constanten Coefficienten als durch Entwicklung von Producte der Form:

$$\cos p[(1 - \varsigma)nt + G]\cos q[(1 - \varsigma')n't + G']\sin m[(n - n')t + H]$$

entstanden denken. Es bedeuten hier: p, q und m ganze, positive Zahlen, G, G' und H constante Winkelgrössen, und endlich ς und ς' kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kraft.

Es findet sich hieraus das Argument:

$$m - p(1 - \varsigma)]nt - [m + q(1 - \varsigma')]n't + mH - pG - qG'$$

als sehr kleine Grössen anzusehen, erstens, weil $\alpha_{r'}$ eine Grösse von der Ordnung σ als Factor enthält, und zweitens weil $\alpha_{r'}$ ausserdem mit einem sehr kleinen Factor von der Ordnung $e^{s'_{r'}-s_{r'}}$ multiplicirt ist, wobei e eine Grösse von der Ordnung der Excentricitäten bezeichnet.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo:

$$s_r - s'_r\mu + \sigma_r = \delta$$

und δ einen im Vergleich zu α_r zwar sehr kleinen aber doch endlichen Werth hat. Es findet sich nun:

$$E_{r,r'} = - s'_r(s_{r'} - s'_{r'}\mu + \sigma_{r'}) - s'_{r'}\delta$$

Da wir fortwährend $r' > r$ annehmen, ist $s'_{r'}$ als eine sehr grosse Zahl anzusehen. Obwohl nun δ eine sehr kleine Grösse bedeutet, kann das Product $s'_{r'}\delta$ demnach doch eine Grösse nullter Ordnung sein, und ist auch in der Regel als eine solche zu betrachten. Die beiden Glieder im Ausdruck für $E_{r,r'}$ sind ferner derartig von einander unabhängig, dass sie sich nur zufällig, d. h. hier, in einem sehr wenig wahrscheinlichen Falle, aufheben können. Wir schliessen daher, dass die Grössen $E_{r,r'}$ — abgesehen von Ausnahmefällen, deren Betrachtung wir als für unsere Untersuchung unwesentlich bei Seite lassen — nicht sehr klein sind, oder, mit anderen Worten, dass sie als Grössen nullter Ordnung anzusehen sind. Anderseits sind sie jedoch immer wesentlich kleiner als die entsprechenden ganzen Zahlen $s'_{r'}$.

Die Gleichung (21) erhalten wir etwas übersichtlicher, wenn wir für g_r eine neue Unbekannte x_r einführen, welche durch die Gleichung:

$$g_r = \frac{\alpha_r}{x_r}$$

---

woraus folgt, dass nachstehende Gleichstellungen gemacht werden können:

$$s_{r'} = m - p$$
$$s'_{r'} = m + q$$
$$B_{r'} = mH - pG - qG'$$
$$\sigma_{r'} = p\varsigma + q\varsigma' = \frac{1}{2}(p+q)(\varsigma+\varsigma') + \frac{1}{2}(p-q)(\varsigma-\varsigma')$$

Weil nun die ganzen Zahlen p und q an die obigen Bedingungen gebunden sind und also nicht beliebige Werthe annehmen können, so ist ein sehr kleiner Werth von $\sigma_{r'}$ wenig wahrscheinlich.

gegeben ist. Es findet sich nehmlich:

$$(23)\qquad x_r - e_r = -s_r'^2 \frac{n'}{n_0}\left\{ \frac{a\sqrt{\frac{A}{s}}}{s'x_r - E_{r,0}} + \frac{a_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}}{s_1'x_r - E_{r,1}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{a_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s_{r-1}'x_r - E_{r,r-1}} + \frac{a_r\sqrt{\frac{A_r}{s_r}}}{s_r'x_r} + \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}'x_r - E_{r,r+1}} + \dots \right\}$$

Hieraus lässt sich der Werth von x_r durch Annäherungen ermitteln. In der Regel wird man den Zweck erreichen, wenn man in der ersten Annäherung alle Glieder von dem Gliede

$$-s_r'^2 \frac{n'}{n_0} \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}'x_r - E_{r,r+1}}$$

an bei Seite lässt. Man erhält somit eine endliche Gleichung $(r+2)^{\text{ten}}$ Grades, deren hier brauchbare Wurzel in gewöhnlicher Weise aufgesucht werden muss. Als brauchbar kann aber nur die Wurzel bezeichnet werden, welche zu einem Werthe von g_r führt, der kleiner als 1 ist. Giebt es keine solche Wurzel, so ist die hier befolgte Integrationsmethode hinsichtlich des entsprechenden Gliedes nicht anwendbar.

Sehr häufig wird man die Gleichung (23) auch in der folgenden Weise auflösen können; man bezeichne:

$$2h_r = e_r - s_r'^2 \frac{n'}{n_0}\left\{ \frac{a\sqrt{\frac{A}{s}}}{s'x_r - E_{r,0}} + \frac{a_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}}{s_1'x_r - E_{r,1}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{a_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s_{r-1}'x_r - E_{r,r-1}} + \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}' - E_{r,r+1}} + \dots \right\}$$

$$\beta_r = s_r'\alpha_r \frac{n'}{n_0}\sqrt{\frac{A_r}{s_r}};$$

die Gleichung (23) wird alsdann:

$$x_r^2 - 2h_r x_r = -\beta_r$$

und man findet:

$$x_r = h_r + \sqrt{h_r^2 - \beta_r}$$

also einen Werth, für deren Brauchbarkeit die Erfüllung der Bedingung:

$$h_r^2 \geqq \beta_r$$

erforderlich ist.

Die Grösse h_r wird bei dieser Rechnung allerdings als bekannt vorausgesetzt, während sie in Wirklichkeit jedoch die unbekannte Grösse x_r enthält. Die Berechnungsmethode bleibt aber anwendbar, wenn die Annäherungen convergiren, welche man dadurch einleitet, dass man für x_r irgend einen Näherungswerth, z. B. e_r in den Ausdruck für h_r einsetzt und hiermit einen verbesserten Werth von x_r berechnet.

Endlich mag noch hervorgehoben werden, dass die ganzen Zahlen s_m und s'_m aus dem Verhältnisse $\mu = \frac{n'}{n}$ und nicht aus dem Verhältnisse $\frac{n'}{n_0}$ gefunden werden. Im Anfang einer Rechnung, wo nur n_0 bekannt ist, können daher nur die ersten dieser ganzen Zahlen gefunden werden; die späteren ergeben sich nach und nach in dem Maasse, wie die mittlere Bewegung n genauer gefunden wird.

II.

Wenn bei einem characteristischen Gliede der entsprechende Werth von g_m oder k_m der Einheit sehr nahe kommt, oder wenn letztere Grösse die Einheit übersteigt, sage ich, dass das Glied kritisch wird, oder nenne dasselbe ein kritisches Glied: nach dem, was oben auseinandergesetzt wurde, ist also das auf ein kritisches Glied folgende characteristische Glied sehr hoher Ordnung hinsichtlich der Excentricitäten und Neigungen, und es muss überhaupt als eine Ausnahme angesehen werden, wenn von diesen folgenden Gliedern das eine oder andere wieder kritisch wird.[1] Wir sahen nehmlich wie im Gegentheil die Divisoren der späteren cha-

[1] In unserm Planetensysteme würde die Ordnung des auf ein kritisches Glied folgenden charakteristischen Gliedes sich wenigstens auf mehrere Hunderte belaufen.

racteristischen Gliedern derartig vergrössert erscheinen, dass eine durch die Integrationen hervorgerufene Vergrösserung der betreffenden Coefficienten nur ausnahmsweise zu erwarten ist.

Bei der Methode, durch welche wir im vorigen Abschnitte die Gleichung (2) integrirten, wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Divisoren nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken, denn im andern Falle hätte man zwar für c_0 und n_0 in den Gleichungen (7) und (8) convergente Entwicklungen finden können, allein die Convergenz der, durch die Gleichung (8) gegebenen Entwicklung der Function F_1 wäre hiermit noch keineswegs sicher gestellt. Unsere Resultate bestehen daher bis jetzt wesentlich nur darin, dass wir von den Entwicklungen (7) und (8) sagen können, dass sie convergiren, wenn die durch die Gleichung (15) gegebenen Grössen k_m nicht die Einheit übersteigen. Wir werden aber nun unsere Untersuchungen dahin ausdehnen, dass wir von einem characteristischen Gliede annehmen, es könne kritisch werden; im Übrigen behalten wir die früheren Voraussetzungen bei, d. h. wir denken uns die folgenden Nenner: $s_1 n - s'_1 n' - \sigma_1 n$, u. s. w. nicht so klein, wie sie bei dem grossen Betrage der ganzen Zahlen s_1 und s'_1 und dem von derselben abhängenden Werthe von σ_1 nur ausnahmsweise sein können. Bei dieser Annahme muss die im vorigen Abschnitte befolgte Integrationsmethode durch eine andere ersetzt werden. Es wird uns hierbei vor Allem darauf ankommen, das kritische Glied von den übrigen zu trennen, wonach diese nach der soeben erwähnten Methode integrirt werden können.

Um den bezeichneten Zweck zu erreichen, zerlegen wir die Function Z in zwei Theile Z_0 und Z_1 und bestimmen diese Theile aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d^2Z_0}{dt^2} = -n^2A\sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) + M - N$$

$$(2) \qquad \frac{d^2Z_1}{dt^2} = -n^2A_1\sin(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots - M + N$$

Mit den hier eingeführten Functionen M und N verfolgen wir, ebensowie mit den früher eingeführten analogen Functionen, den Zweck, Glieder gewisser Form von der einen der obigen Gleichungen zu der andern überzuführen.

Wie im vorhergehenden Abschnitte setzen wir auch jetzt:

$$\zeta' = c' + n't$$

$$\zeta = c + nt + Z + \delta\zeta$$

$$= c + nt + Z_0 + Z_1 + \delta\zeta$$

und erhalten durch Entwicklung nach den Potenzen von $Z_1 + \delta\zeta$:

$$\sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma t + B)$$

$$= \sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ \frac{s(Z_1 + \delta\zeta)}{1}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \frac{s^2(Z_1 + \delta\zeta)^2}{1 \cdot 2}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \ldots$$

Weil nun die Function $Z_1 + \delta\zeta$, wie man hier anzunehmen berechtigt ist, aus lauter Sinusgliedern besteht, so enthalten die ungraden Potenzen dieser Function ebenfalls lauter Sinusglieder, die graden Potenzen dagegen Cosinusglieder, nebst einer nothwendig positiven Constante. Diese constanten Glieder bezeichne ich durch $h_2, h_4, \ldots$, und bestimme die Function N aus der Formel:

$$N = - n^2 A \frac{s(Z_1 + \delta\zeta)}{1}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ n^2 A \frac{s^3(Z_1 + \delta\zeta)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \ldots$$

$$+ n^2 A s^2 \frac{(Z_1 + \delta\zeta)^2 - h_2}{1 \cdot 2}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- n^2 A s^4 \frac{(Z_1 + \delta\zeta)^4 - h_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ \ldots .$$

Aus der Gleichung (1) findet sich hierauf die nachstehende:

$$(3) \qquad \frac{d^2 Z_n}{dt^2}$$
$$= -n^2 A\left(1 - \frac{s^2 h_2}{1.2} + \frac{s^4 h_4}{1.2.3.4} - \ldots\right) \sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$
$$+ M;$$

und wir denken uns endlich die Function M so bestimmt, dass Glieder mit dem Argumente: $sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B$, welche etwa in der Gleichung (2) entstehen können, mit dem Gliede rechter Hand in der Gleichung (3) ohne weiteres vereinigt werden. Wenn wir uns also den Coefficienten A in entsprechender Weise abgeändert denken, so können wir das Glied M ohne weiteres bei Seite lassen.

Es entsteht also nun eine Gleichung, die wir etwas vereinfacht schreiben werden, nachdem wir die Bezeichnungen:

$$2V = (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + sc - s'c' + B$$
$$\alpha^2 = sA\left(1 - \frac{s^2 h_2}{1.2} + \frac{s^4 h_4}{1.2.3.4} - \ldots\right)$$

festgestellt haben. Wir finden:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -\alpha^2 n^2 \sin V \cos V$$

Durch Integration dieser Gleichung ergiebt sich unmittelbar, indem wir die Constante durch $\gamma^2 n^2$ bezeichnen,

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2 n^2 - \alpha^2 n^2 \sin V^2,$$

und durch die zweite Integration, bei der wir die hinzutretende Constante durch C bezeichnen, entsteht die Gleichung:

$$(4) \qquad V = \operatorname{am}(\gamma n t + C), \qquad \operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Es wird also auch:

$$(4') \qquad \frac{dV}{dt} = \gamma n \operatorname{dn}(\gamma n t + C)$$

In der Gleichung (4) haben wir ein Resultat gewonnen, welches leicht in bekannter Weise entwickelt werden kann. Hierauf erhält man unmittelbar den Werth von Z_0, dessen erstes Glied mit dem ersten Gliede des durch die Gleichung (5) im ersten Abschnitte gegebenen Werthes von Z übereinstimmen muss, nachdem man das Argument dieses Gliedes in derselben Weise entwickelt hat, wie in diesem Abschnitte zur Herstellung der Gleichung (3) nöthig war. Auf die Identität dieser Resultate, welche übrigens nur unter der Bedingung stattfindet, dass

$$k < 1$$

habe ich nur vorübergehend hingewiesen; wir werden im Folgenden von derselben keinen Gebrauch machen.

Die Werthe von $c + Z_0$ und $n + \frac{dZ_0}{dt}$, welche für den Zeitpunkt $t = 0$ gelten, bezeichne ich durch c_0 und n_0. Diese Grössen sind allerdings nicht identisch mit den früher unter denselben Bezeichnungen verstandenen Grössen, sie unterscheiden sich aber von diesen doch nur wenig, und können bei den jetzigen Untersuchungen die Stelle der letzteren vertreten, da man übersehen kann, dass die Unterschiede beider mit Leichtigkeit ermittelt und in der Rechnung berücksichtigt werden könnten. — Indem wir uns überdies der Bezeichnung:

$$D = \frac{1}{2}(sc_0 - s'c' + B)$$

bedienen, erhalten wir:

$$D = \operatorname{am} C;$$

und:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\left(\frac{dV}{dt}\right)_0 = 2\gamma n \operatorname{dn} C$$

Setzen wir nun:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\alpha\eta n_0$$

so wird:

$$\frac{n_0}{n} k = \frac{1}{\eta} \operatorname{dn} C$$

oder:

$$\eta^2 \frac{n_0^2}{n^2} k^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn} C^2$$

Anderseits haben wir aber:

$$k^2 \sin D^2 = k^2 \operatorname{sn} C^2.$$

so dass die Gleichung:

$$\eta^2 \frac{n_0^2}{n^2} k^2 + k^2 \sin D^2 = 1$$

unmittelbar erhalten wird. — Bezeichnen wir noch:

$$\eta \frac{n_0}{n} = f$$

so entsteht die Gleichung:

$$f^2 + \sin D^2 = \frac{1}{k^2}, \tag{5}$$

welche mit der Gleichung (15) des vorigen Abschnittes bis auf Grössen, die hier nicht in Betracht kommen, identisch ist. Eine strenge Vergleichung mit den Resultaten des vorhergehenden Abschnittes ist überhaupt auch nicht nöthig, weil die Convergenz der daselbst gegebenen Reihen nicht nothwendig aufhört, wenn die Grössen k_m um sehr kleine Beträge die Einheit übersteigen; es genügt, dass die Grössen $k_m \sin D_m$ und $k_m \cos D_m$ kleiner als 1 bleiben. Bei der jetzigen Lösung kann aber der Modul k beliebig gross werden, ohne dass die durch die Gleichung (4) angegebene Form des Integrales aufhörte richtig zu sein. Dem ungeachtet ist es in mancherlei Hinsicht vortheilhaft, das Resultat durch elliptische Functionen auszudrücken, welche dem Modul

$$\frac{1}{k} = l$$

entsprechen, wenn der Modul k die Einheit übersteigt. Man findet nun leicht, auf Grund einiger bekannten Transformationsformeln,

$$(6) \quad \left| \begin{aligned} \sin V &= l \operatorname{sn}(\alpha n t + C_1) \\ \cos V &= \operatorname{dn}(\alpha n t + C_1) \\ \frac{dV}{dt} &= \gamma n \operatorname{cn}(\alpha n t + C_1) \end{aligned} \right.$$

wo:

$$C_1 = \frac{1}{l} C = kC$$

gesetzt worden ist.

Weil nun die Entwicklung von $\operatorname{cn}(\alpha t + C_1)$ kein constantes Glied enthält, so kann auch nicht die Function:

$$2\frac{dV}{dt} = sn - s'n' + \sigma n + s\frac{dZ_0}{dt}$$

ein constantes Glied enthalten. In $\frac{dZ_0}{dt}$ können wir aber ein solches Glied nicht voraussetzen, wenn n die Bedeutung der mittleren Bewegung hat; wir schliessen daher, dass:

$$(7) \qquad sn - s'n' + \sigma n = 0$$

Setzen wir in den vorstehenden Gleichungen: $t = 0$, so gewinnen wir die Werthe:

$$\frac{1}{l}\sin D = \operatorname{sn} C_1$$

$$\frac{f}{l} = \operatorname{cn} C_1$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt uns:

$$f^2 + \sin D^2 = l^2$$

also ein Resultat, welches bereits oben durch die Gleichung (5) nachgewiesen wurde.

Wenn $k < 1$, muss die Grösse $sn - s'n' + \sigma n$ offenbar gleich dem constanten Gliede in der Entwicklung von $2\gamma n \operatorname{dn}(\gamma nt + C)$ sein. Diese Bedingung giebt uns:

$$(8) \qquad sn - s'n' + \sigma n = \gamma n \frac{\pi}{K}$$

wobei wir, wie üblich, durch K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bezeichnen. Ziehen wir von dieser Gleichung den Werth:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\gamma n \operatorname{dn} C$$

ab, so bleibt:

$$s(n - n_0) = 2\gamma n\left(\frac{\pi}{2K} - \operatorname{dn} C\right),$$

ein Werth, aus welchem wir auf Grund der Beziehung

$$n \operatorname{dn} C = \eta n_0 k = \frac{\eta n_0 a}{\gamma}$$

den folgenden erhalten:

$$s(n - n_0) = 2\frac{a\eta n_0}{\operatorname{dn} C}\left(\frac{\pi}{2K} - \operatorname{dn} C\right).$$

Für den Fall aber, dass $k > 1$, haben wir:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\gamma n \operatorname{cn} C_1$$

und diesen Werth ziehen wir von der Gleichung (7) ab. Wir erhalten somit:

$$s(n - n_0) = -2\gamma n \operatorname{cn} C_1$$

Für die Beziehung zwischen n und n_0 haben wir also zwei verschiedene Ausdrücke gefunden, den einen gültig für den Fall: $k < 1$, den andern für den Fall: $k > 1$. Diese Ausdrücke sind aber nicht nur formell von einander verschieden, d. h. so, dass sie durch Transformation auf einander reducirt werden können. Wenn wir also n als Function von n_0 und k betrachten, so schliessen wir auf Grund des erwähnten Umstandes, dass n nicht eine synectische Function dieser beiden Variablen ist, sondern dass im Punkte $k = 1$ eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet.

Die Formeln, welche zur Berechnung von k und C oder von l und C_1 dienen, werden wir jetzt unter einer von der früheren etwas abweichenden Form angeben, wobei wieder die Discontinuität der betreffenden Relationen hervortreten wird. Aus der Gleichung:

$$a\eta n_0 = \gamma n \operatorname{dn} C$$

oder:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{a\eta}{\gamma \operatorname{dn} C} = \frac{\eta k}{\operatorname{dn} C}$$

erhalten wir auf Grund der Gleichungen (7) und (8):

$$\frac{s'n'}{(s+\sigma)n_0} = \frac{\eta}{l\,\mathrm{cn}\,C_1}$$

$$\frac{s'n'}{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0} = \frac{\eta k}{\mathrm{dn}\,C}$$

Zu diesen Beziehungen kommen die bereits angegebenen. Wir haben also die beiden Systeme:

$$\text{(I)}\quad \left|\begin{aligned} &\mathrm{sn}\,C = \sin D\\ &\mathrm{cn}\,C = \cos D\\ &\frac{1}{k}\,\mathrm{dn}\,C = \eta\,\frac{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0}{s'n'}\\ &k^2 = \frac{1}{\eta^2\left(\frac{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0}{s'n'}\right)^2 + \sin D^2}\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left|\begin{aligned} &l\,\mathrm{sn}\,C_1 = \sin D\\ &l\,\mathrm{cn}\,C_1 = \eta\,\frac{(s+\sigma)n_0}{s'n'}\\ &\mathrm{dn}\,C_1 = \cos D\\ &l^2 = \eta^2\left(\frac{(s+\sigma)n_0}{s'n'}\right)^2 + \sin D^2\end{aligned}\right.$$

In Fällen, wo k oder l der Einheit sehr nahe kommt, sind diejenigen Formelsysteme den vorhergehenden vorzuziehen, welche man durch Übergang auf die complementären Moduln k' und l' erhält. Es findet sich mit Hülfe bekannter Transformationsformeln:

$$
\text{(III)} \quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn}(iC, k') &= i \operatorname{tang} D \\
\operatorname{cn}(iC, k') &= \frac{1}{\cos D} \\
\frac{1}{k} \operatorname{dn}(iC, k') &= \eta \frac{\left(s + \sigma + \gamma \frac{\pi}{K}\right) n_0}{s'n' \cos D} \\
-\frac{k'^2}{k^2} &= \cos D^2 - \eta^2 \left(\frac{\left(s + \sigma + \gamma \frac{\pi}{K}\right) n_0}{s'n'}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{(IV)} \quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn}(iC_1, l') &= i \frac{s'n' \sin D}{\eta (s + \sigma) n_0} \\
\frac{1}{l} \operatorname{cn}(iC_1, l') &= \frac{s'n'}{\eta (s + \sigma) n_0} \\
\frac{1}{l} \operatorname{dn}(iC_1, l') &= \frac{s'n' \cos D}{\eta (s + \sigma) n_0} \\
l'^2 &= \cos D^2 - \eta^2 \left(\frac{(s + \sigma) n_0}{s'n'}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

Für:

$$k = l = 1$$

oder:

$$k' = l' = 0$$

fallen alle die angeführten Systeme zusammen, weil das Glied $\gamma \frac{\pi}{K}$ verschwindet; im Übrigen lassen sich die Systeme (I) und (II) oder (III) und (IV) nicht auf einander zurückführen.

Die Discontinuität, welche sich in den vorstehenden Beziehungen manifestirt, findet man nicht in den verschiedenen Formen wieder, durch welche die Function V durch die Zeit ausgedrückt werden kann. In den Gleichungen (4), (4') und (6) haben wir bereits zwei dieser Formen gegeben, diejenigen nehmlich, welche den Moduln k und l entsprechen; die beiden noch übrigen entsprechen den Moduln k' und l'; sie finden sich mittelst bekannter Transformationsformeln wie folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sin V = -i \operatorname{tang am}[i(\gamma n t + C), k'] \\ \cos V = \dfrac{1}{\operatorname{cn}[i(\gamma n t + C), k']} \\ \dfrac{dV}{dt} = \gamma n \dfrac{\operatorname{dn}[i(\gamma n t + C), k']}{\operatorname{cn}[i(\gamma n t + C), k']} \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \sin V = -il \operatorname{tang am}[i(\alpha n t + C_1), l'] \\ \cos V = \dfrac{\operatorname{dn}[i(\alpha n t + C_1), l']}{\operatorname{cn}[i(\alpha n t + C_1), l']} \\ \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\gamma n}{\operatorname{cn}[i(\alpha n t + C_1), l']}; \end{cases}$$

und diese beiden Systeme können aus einander abgeleitet werden, indem man sich der Transformationsformeln bedient, welche für den Übergang vom Modul k' auf den Modul $i\frac{k'}{k} = l'$ gültig sind.

Die Entwicklung der Functionen $\sin V$, $\cos V$ und $\frac{dV}{dt}$ in trigonometrischen Reihen mit reellem Argumente würde bei sehr kleinen Werthen von k' oder l' offenbar so wenig convergent sein, dass ihre Anwendung nicht als zweckmässig erachtet werden kann. Für solche Fälle, die allerdings zu den Ausnahmen gehören, müssen wir uns demnach nach anderen Entwicklungen umsehen, und dabei namentlich darauf Rücksicht nehmen, dass etwa später auftretende Quadraturen analytisch ausgeführt werden können. — Die nach den Potenzen von Exponentialfunctionen fortschreitenden Reihen, an die man hierbei zunächst denken könnte, erweisen sich bei näherer Überlegung auch nicht, wenigstens nicht direct, als anwendbar, weil sie nicht beständig convergiren. In der Darstellung der elliptischen Functionen durch Folgen von Partialbrüchen haben wir aber einen Ausgangspunkt, aus dem wir Entwicklungen herleiten können, welche unsern Forderungen genügen.

Wir bezeichnen, um eine kürzere Schreibweise zu gewinnen,

$$\gamma n t + C = u;$$

dann wird:

$$\alpha n t + C_1 = ku$$

Ferner wenden wir, neben der üblichen Bezeichnung:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

auch die folgende an:

$$q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

In der Theorie der elliptischen Functionen werden bekanntlich nachstehende Entwicklungen gegeben:

$$(11)\quad \begin{cases} -i\dfrac{\mathrm{sn}(iu,k')}{\mathrm{cn}(iu,k')} = \dfrac{\pi}{kK'}\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\dfrac{(-1)^n q'^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}} - \sum\dfrac{(-1)^n q'^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\} \\[2ex] \dfrac{1}{\mathrm{cn}(iu,k')} = \dfrac{\pi}{kK'}\left\{\dfrac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\dfrac{(-q')^n e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\dfrac{(-q')^n e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{dn}(iu,k')}{\mathrm{cn}(iu,k')} = \dfrac{\pi}{K'}\left\{\dfrac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\dfrac{q'^n e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\dfrac{q'^n e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\} \end{cases}$$

bei denen die Summationen von $n = 1$ bis $n = \infty$ auszudehnen sind.

Diese Formeln, welche unmittelbar die Entwicklungen des Systems (9) geben, sind in der Hinsicht bemerkenswerth, dass die darin vorkommenden Nenner unverändert bleiben, wenn man q' gegen $-q'$ vertauscht. — Weil nun das Formelsystem (10) aus dem Systeme (9) ohne weiteres erhalten wird, wenn man k' durch $\frac{ik'}{k}$, oder, was dasselbe ist, q' durch $-q'$ ersetzt, und weil die soeben angeführten Entwicklungen ebenfalls für negative Werthe von q' gültig und für die geeignete Darstellung der betreffenden Functionen anwendbar bleiben, so lassen sich diese Functionen — es sei, dass sie durch die Gleichungen des Systems (9) oder durch die des Systems (10) gegeben sind — durch Entwicklungen angeben, die noch gültig bleiben, wenn man sich q' als veränderlich denkt

und dabei für dieselbe Werthe annimmt, die abwechselnd positiv und negativ sein können.

Um das Verhalten der in Frage stehenden Formeln beim Übergange völlig in's Licht setzen zu können, bedienen wir uns der Bezeichnungen L und L' zur Angabe der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, welche den Moduln l und l' entsprechen. Bekanntlich geht nun K' in lL' über, wenn q' negativ wird, oder wenn k' in $\frac{ik'}{k}$ übergeht.

Auf Grund der bekannten Entwicklungen:

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \dots$$

$$\frac{2kK'}{\pi} = 1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \dots$$

schliessen wir nun auf die Relation:

$$k\left(1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \dots\right) = 1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \dots$$

und hiermit eröffnet sich die Möglichkeit, das Argument $\frac{\pi u}{2K'}$ in zweifacher Weise auszudrücken. Wir haben nehmlich:

$$\frac{\pi u}{2K'} = \frac{\gamma nt + C}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \dots}$$

Wird nun q' negativ, so geht dieser Werth in den folgenden über:

$$\begin{aligned}\frac{\pi u}{2K'} &= \frac{\gamma nt + C}{1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \dots} \\ &= \frac{l(\gamma nt + C)}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \dots} \\ &= \frac{\alpha nt + C_1}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \dots} = \frac{\pi}{2L'}(\alpha nt + C_1)\end{aligned}$$

Der Algorithmus, durch welchen die Entwicklungen (11) dargestellt wurden, bietet nicht die nöthige Bequemlichkeit dar, weil ein jedes Glied

der unendlichen Reihen für einen gewissen Werth der Veränderlichen u grösser wird als die Glieder vorher und nachher. Die betreffenden Reihen sind zwar convergent aber der Punkt, wo die Convergenz anfängt, verschiebt sich und ist als eine Function von u anzusehen. Um gleichförmig convergente Entwicklungen zu erhalten, müssen wir die Veränderliche innerhalb gewisser Grenzen einschliessen, wozu folgende Schritte nöthig sind, welche, wie wir später sehen werden, die Anwendbarkeit der Entwicklungen auch über die gezogenen Grenzen hinaus nicht verhindern.

Es sei nun m eine positive oder negative ganze Zahl, die wir so bestimmt denken, dass die Grösse ω in der Gleichung

$$u = 2mK + \omega$$

immer zwischen 0 und $+2K$ eingeschlossen bleibt. Auf Grund der Periodicität der elliptischen Functionen ergeben sich hiermit aus den Entwicklungen (11) die nachstehenden, deren Richtigkeit man übrigens leicht direct verificiren kann,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
-i\frac{\operatorname{sn}(iu,k')}{\operatorname{cn}(iu,k')} &= (-1)^m\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \frac{q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} - \dots\right\}\\
\frac{1}{\operatorname{cn}(iu,k')} &= (-1)^m\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} - \frac{q'e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \dots\right\}\\
\frac{\operatorname{dn}(iu,k')}{\operatorname{cn}(iu,k')} &= \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \frac{q'e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \dots\right\}
\end{aligned}\right.$$

Die Entwicklung eines Gliedes der Form:

$$\frac{q'^{\nu} e^{-x}}{1 + q'^{2\nu} e^{-2x}}$$

kann unmittelbar nach den steigenden Potenzen von $q'^{2\nu}e^{-2x}$ ausgeführt werden, wenn die ganze Zahl ν grösser als 0 ist, und convergirt dieselbe immer sehr schnell, da der Factor q'^2 eine äusserst kleine Grösse bezeichnet; wenn aber der Fall eintritt, wo $\nu = 0$, ist die Convergenz derartiger Potenzenreihen nicht mehr gesichert, wesshalb wir uns nach anderen Formen für die betreffenden Entwicklungen umsehen müssen. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der identischen Gleichung:

$$\frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{-x}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)}{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}(1 - e^{-2x})}$$

Das Glied:

$$\frac{1}{2}e^{-2x}(1 - e^{-2x})$$

kann offenbar nie grösser als $\frac{1}{8}$ werden so lange x positiv bleibt; wir können daher nach den steigenden Potenzen desselben entwickeln und dabei eine, wenn auch nicht sehr rapide, so doch genügende Convergenz erwarten. Um die betreffenden Entwicklungen übersichtlicher zu erhalten, bedienen wir uns dabei der nachstehenden Bezeichnungen:

$$U^{(0)}(x) = e^{-x}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

$$U^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})$$

$$U^{(2)}(x) = \frac{1}{2^2}e^{-5x}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})^2$$

. . . .

und allgemein, indem r eine ganze Zahl bedeutet,

$$U^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r}e^{-(2r+1)x}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})^r \tag{13}$$

Mit Hülfe dieses Algorithmus erhalten wir die Entwicklung:

$$(14) \qquad \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = U^{(0)}(x) + U^{(1)}(x) + \ldots,$$

womit die betreffenden Glieder der Gleichungen (12) durch convergente, nach U-Functionen fortschreitende Reihen dargestellt werden können.

Wir sind jetzt in der Lage, das Integral:

$$(15) \qquad J = \int_0^u e^{i\lambda} \mathrm{dn}\, u\, du,$$

wo λ eine beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl bedeutet, auch in den Fällen analytisch berechnen zu können, wo die Grösse q so nahe der Einheit kommt, dass die gewöhnliche trigonometrische Reihe für $\mathrm{dn}\, u$ nicht mehr als genügend convergent erachtet werden kann. — Zunächst zerlegen wir das Integrationsintervall in Theile, von denen die m ersten den Werth $2K$ haben, der letzte aber den Werth ω. Es wird also:

$$J = \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du + \int_{2K}^{4K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du + \ldots + \int_{(2m-2)K}^{2mK} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du + \int_{2mK}^{2mK+\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du$$

Die Grenzen dieser Integrale können sehr leicht auf o und $2K$ oder auf o und ω reducirt werden. Es ist nehmlich:

$$\int_{2K}^{4K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du = e^{2i\lambda K} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du$$

. . . .

$$\int_{(2m-2)K}^{2mK} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du = e^{(2m-2)i\lambda K} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du$$

$$\int_{2mK}^{2mK+\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du = e^{2mi\lambda K} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u\, du$$

Man erhält hiermit, indem man sogleich die Glieder summirt, welche den Coefficienten des bestimmten Integrals mit den Grenzen o und K bilden,

$$(16) \qquad J = \frac{1 - e^{2mi\lambda K}}{1 - e^{2i\lambda K}} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du + e^{2mi\lambda K} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du$$

Denken wir uns jetzt: $k > 1$, also $l < 1$, und bezeichnen wir:

$$ku = \frac{1}{l} u = w,$$

so wird die Function J durch die nachstehende Formel gegeben:

$$(17) \qquad J = l \int_0^{w} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

Wir setzen nun:

$$w = 2mL + \tau$$

und denken uns die ganze Zahl m so gewählt, dass τ zwischen 0 und $2L$ schwankt.

Zufolge der Gleichungen:

$$\int_{2L}^{4L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw = - e^{2il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

$$\int_{4L}^{6L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw = + e^{4il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{(2m-2)L}^{2mL} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw = (-1)^{m-1} e^{(2m-2)il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

$$\int_{2mL}^{2mL+\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw = (-1)^{m} e^{2mil\lambda L} \int_0^{\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

ergiebt sich hierauf:

$$(18) \qquad J(l) = \frac{1 - e^{2mil\lambda L + im\pi}}{1 + e^{2il\lambda L}}\, l \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw + e^{2mil\lambda L + im\pi}\, l \int_0^{\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w\, dw$$

Die Formeln (16) und (18) geben den Anschein, als ob zwischen ihnen ein Sprung stattfände; dies ist aber nicht der Fall. Wenn nehmlich:

$$k = l - 1,$$

so ist:

$$K = L = \infty$$

und nun muss offenbar der Werth Null für die ganze Zahl m angenommen werden. Man bemerkt leicht, dass die beiden Formeln (16) und (18) unter dieser Voraussetzung dasselbe Resultat ergeben, nehmlich:

$$J = \int_0^\omega \frac{2e^{i\lambda u}\,du}{e^u + e^{-u}} \tag{19}$$

Die Entwicklung der Function unter dem Integralzeichen giebt uns:

$$J = 2\int_0^\omega e^{i\lambda u}(U^{(0)}(u) + U^{(1)}(u) + \ldots)du$$

Die Convergenz dieser Entwicklung wollen wir hier noch untersuchen, weil diese nahezu dieselbe ist wie man sie bei den analogen Entwicklungen der Integrale in den Gleichungen (16) und (18) erwarten kann. Die Annahme in Bezug auf die Grösse des Coefficienten λ, welche für uns das grösste Interesse hat, ist die, dass dieselbe sehr klein ist. Wir werden aus diesem Grunde, und um die Schreibweise zu vereinfachen λ neben den ganzen Zahlen vernachlässigen. Das Integral setzt sich nun aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine nach den Potenzen der Exponentialgrösse $e^{-\omega}$ entwickelt erscheint, und daher mit wachsendem ω rasch abnimmt und sehr schnell convergirt. Der andere Theil, welcher durch die Substitution der Grenze 0 entsteht, reducirt sich auf eine Constante. Für den Coefficienten des n^{ten} Gliedes, den wir mit K_n bezeichnen wollen, ergiebt sich bei Vernachlässigung von λ neben n der Ausdruck:

$$\begin{aligned} K_n = {} & \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{2n+1} - \frac{n}{1}\,\frac{1}{2n+3} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{2n+5} - \ldots\right\} \\ & - \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2n+3} - \frac{n}{1}\,\frac{1}{2n+5} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{2n+7} - \ldots\right\} \end{aligned}$$

Die beiden Reihen lassen sich in bekannter Weise durch bestimmte Integrale summiren, wodurch gefunden wird:

$$K_n = \frac{1}{2^{n-1}}\int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx - \frac{1}{2^n}\int_0^1 x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx$$

Nun hat man aber allgemein:

$$\int x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx = -\frac{x^{2n+1}(1 - x^2)^{n+1}}{4n + 3} + \frac{2n + 1}{4n + 3}\int x^{2n}(1 - x^2)^n dx,$$

eine Formel von deren Richtigkeit man sich durch Differentiation sehr leicht überzeugen kann. Für die Grenzwerthe verschwindet das vom Integralzeichen befreite Glied und es findet sich:

$$\int_0^1 x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx = \frac{2n + 1}{4n + 3}\int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx$$

Hiermit ergiebt sich für K_n der Werth:

$$K_n = \frac{6n + 5}{8n + 6}\,\frac{1}{2^{n-1}}\int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx$$

$$= \frac{6n + 5}{8n + 6}\,\frac{1}{2^n}\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1 - x)^n dx$$

Es ist aber:

$$\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1 - x)^n dx = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n + 1)}{\Gamma\left(2n + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= 2\,\frac{2.4.6\ldots 2n}{(2n + 1)(2n + 3)\ldots(2n + 2n + 1)}$$

Man bemerkt auf Grund dieser Formeln, dass die K_n-Coefficienten bei grossen n-Werthen nahezu in derselben Weise convergiren wie eine nach den Potenzen von $\frac{1}{8}$ fortschreitende Reihe.

Wir wenden uns nun zu der Entwicklung des Integrales:

(20) $$H(k) = \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du$$

Für dn$u$ setzen wir hier die Reihe ein, welche in den Gleichungen (12) gegeben ist. Nachdem wir die Glieder dieser Reihe nach U-Functionen entwickelt haben, erhalten wir das in Frage stehende Integral in Reihen zerlegt, deren Glieder die nachstehende allgemeine Form haben:

(21) $$H_\nu(k) = \frac{\pi}{K'} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \left(e^{-\nu \frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)} \right) du$$

Es bedeutet dabei ν eine ganze positive ungrade Zahl.

In gleicher Weise zerlegen wir das Integral:

(22) $$H(\omega, k) = \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du$$

in Theile der Form:

(23) $$H_\nu(\omega, k) = \frac{\pi}{K'} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \left(e^{-\nu \frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)} \right) du$$

Die Integrale (21) und (23) finden sich nun unmittelbar; es ist nehmlich:

(A) $$\int e^{i\lambda u} \left(e^{-\nu \frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\nu \frac{\pi}{2K'}(2K-u)} \right) du = -\frac{e^{i\lambda u - \nu \frac{\pi u}{2K'}}}{\frac{\nu\pi}{2K'} - i\lambda} + \frac{e^{i\lambda u - \frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)}}{\frac{\nu\pi}{2K'} + i\lambda};$$

und hieraus ergiebt sich, nachdem wir die Grenzen 0 und $2K$ für u substituirt haben,

(24) $$H_\nu(k) = \frac{\pi}{K'} \frac{\frac{\nu\pi}{2K'}(1 - q'^\nu)(1 + e^{2i\lambda K})}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2} + i \frac{\pi}{K'} \frac{\lambda(1 + q'^\nu)(1 - e^{2i\lambda K})}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

Durch Einsetzen der Grenzen o und ω findet sich in derselben Weise, und wenn wir uns dabei der Bezeichnung:

$$h = e^{-\frac{\pi\omega}{2K}}$$

bedienen,

$$(25)\qquad H_\nu(\omega, k) = \frac{\pi}{K'} \frac{\frac{\nu\pi}{2K'}\left\{\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu - h^\nu\right]e^{i\lambda\omega} + 1 - q'^\nu\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

$$- i\frac{\pi}{K'} \frac{\lambda\left\{\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu + h^\nu\right]e^{i\lambda\omega} - (1 + q'^\nu)\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

Mit Rücksicht auf die in (24) und (25) gegebenen Werthe erhält man aus der Gleichung (16) den entsprechenden Theil von J, den ich mit $J_\nu(k)$ bezeichnen werde. Für die Summe $2mK + \omega$ setzen wir den Werth u ein, und beachten, dass

$$\frac{1 + e^{2i\lambda K}}{1 - e^{2i\lambda K}} = i \operatorname{cotang} \lambda K$$

Das Resultat wird nun:

$$(26)\qquad J_\nu(k) = \frac{\pi}{K'} \frac{\frac{\nu\pi}{2K'}(1 - q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}\left\{i \operatorname{cotang} \lambda K(1 - e^{2mi\lambda K}) + e^{2mi\lambda K}\right\}$$

$$+ i\frac{\pi}{K'} \frac{\lambda(1 + q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

$$+ \frac{\pi}{K'} \frac{\frac{\nu\pi}{2K'}\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu - h^\nu\right] - i\lambda\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu + h^\nu\right]}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2} e^{i\lambda u}$$

Zu dieser Formel fügen wir die Bemerkung, dass die Glieder, welche den Factor $\operatorname{cotang} \lambda K$ enthalten, und also bei sehr kleinen Werthen von λ sehr gross werden können, von den Exponentialgrössen h und $\frac{q'}{h}$ un-

abhängig sind. Die Glieder, welche diese Grössen enthalten, werden durch den Integrationsprocess nicht vergrössert, sondern im Gegentheil vermindert, weil sie den Factor $\frac{1}{\nu}$ erhalten.

Es erübrigt, die Formeln, welche den Gleichungen (20)—(26) entsprechen, für den Modul l aber gültig sind, abzuleiten. Wir führen zunächst die Bezeichnung

$$H(l) = l\int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw \tag{27}$$

ein, und zerlegen, der zweiten der Gleichungen (12) gemäss, dieses Integral in Theile der Form:

$$H_\nu(l) = (-1)^m \frac{\pi}{L'} \int_0^{2L} e^{il\lambda w}\left(e^{-\nu\frac{\pi w}{2L'}} - e^{-\frac{\nu\pi}{2L'}(2L-w)}\right)dw \tag{28}$$

Ebenso zerlegen wir das Integral:

$$H(\tau, l) = l\int_0^{\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw \tag{29}$$

und bezeichnen die Theile durch:

$$H_\nu(\tau, l) = (-1)^m \frac{\pi}{L'} \int_0^{\tau} e^{il\lambda w}\left(e^{-\nu\frac{\pi w}{2L'}} - e^{-\frac{\nu\pi}{2L'}(2L-w)}\right)dw \tag{30}$$

Es ist hierbei die Bemerkung am Platze, dass $H_\nu(\tau, l)$ aus $H_\nu(\omega, k)$ unmittelbar hervorgeht, wenn man K' in lL', K in $l(K + iL')$, u in lw und ω in $l\tau$ verwandelt, und dem Resultate überdies den Factor $(-1)^m$ hinzufügt.

Mit Hülfe der Formel (A) ergiebt sich aus (28) der Werth:

$$\begin{aligned} H_\nu(l) = {} & (-1)^m \frac{\pi}{L'} \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}(1 + q'^\nu)(1 - e^{2il\lambda L})}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \\ & + (-1)^m i \frac{\pi}{L'} \frac{l\lambda(1 - q'^\nu)(1 + e^{2il\lambda L})}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \end{aligned} \tag{31}$$

und aus der Formel (30) findet man die folgende:

$$(32)\qquad H_\nu(\tau, l) = (-1)^m \frac{\pi}{L'} \left\{ -\frac{\frac{\nu\pi}{2L'}\left\{\left[\left(\frac{q}{b}\right)^\nu + b^\nu\right] e^{il\tau} - (1 + q^\nu)\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} + i\frac{l\lambda\left\{\left[\left(\frac{q}{b}\right)^\nu - b^\nu\right] e^{il\tau} + 1 - q^\nu\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \right\}$$

indem wir die Bezeichnung

$$b = e^{-\nu\frac{\pi\tau}{2L'}}$$

feststellen.

Auf Grund der Gleichung (18) erhalten wir nun für den Theil $J_\nu(l)$ der Function $J(l)$ den Ausdruck:

$$(33)\qquad J_\nu(l) = \frac{\pi}{L'} \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}(1 + q^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \{i \operatorname{tang} l\lambda L [(-1)^m - e^{2mil\lambda L}] + e^{2mil\lambda L}\}$$

$$+ i(-1)^m \frac{\pi}{L'} \frac{l\lambda(1 - q^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2}$$

$$- \frac{\pi}{L'} \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}\left[\left(\frac{q}{b}\right)^\nu + b^\nu\right] - il\lambda\left[\left(\frac{q}{b}\right)^\nu - b^\nu\right]}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} e^{il}$$

Diese Formel verhält sich hinsichtlich des Grosswerdens gewisser Glieder grade umgekehrt als die Formel (26). Während nehmlich in letzterer einige Glieder bei sehr kleinen Werthen von λ erheblich anwachsen können, ist dies in der Formel (33) nicht der Fall, sondern werden bei ihr grade dieselben Glieder wesentlich verkleinert erscheinen. Vergrössert werden aber in der Formel (33) solche Glieder, bei denen das Product $l\lambda L$ nahezu den Werth einer ungraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ hat.

In Bezug auf die Formeln (26) und (33) ist endlich noch zu be-

merken, dass sie für $m = 0$ mit einander identisch werden; sie geben daher auch identische Werthe für $k = l = 1$.

Die Ungleichheit, welche einem Gliede entspricht, bei dem der Coefficient k_m [Abschn. I, Gleichung (15)] grösser als die Einheit ist, hat man Libration genannt. Solche Ungleichheiten wurden bisher als Ausnahmen angesehen und bei den Untersuchungen über das Problem der drei Körper oder über die Störungstheorie fast immer unberücksichtigt gelassen. In der That war es auch nur in sehr seltenen Fällen möglich, das Vorhandensein derartiger Bewegungsgleichungen zu constatiren, wesshalb eine allgemeine und tiefer dringende Untersuchung derselben für astronomische Zwecke nicht als nöthig erachtet wurde; eine directe Veranlassung, die hierauf bezüglichen Untersuchungen weiter auszudehnen, als zur Behandlung des gegebenen Falles nöthig war, gab es von diesem Gesichtspunkte aus eben nicht.

Ganz anders gestaltet sich aber die Nothwendigkeit derartiger Untersuchungen, wenn man sie von einem theoretischen Standpunkte aus betrachtet. Dann zeigt sich nehmlich das seltene Vorkommen von Librationsungleichheiten wohl als eine Thatsache, die unserm Sonnensysteme eigenthümlich ist, keineswegs aber als eine Erscheinung, die an sich überwiegend wahrscheinlich wäre. Bei einer absoluten Lösung des Problems der drei Körper, auch wenn man die üblichen, mit den Verhältnissen im Sonnensysteme übereinstimmenden Einschränkungen hinsichtlich der Werthe der Massen, der Excentricitäten, der Neigungen und der mittleren Entfernungen von der Sonne gelten lässt, muss daher die Möglichkeit des Vorkommens einer Librationsungleichheit offen gehalten werden. — Wollte man als Grundlage der Untersuchung sich die Annahme gestatten, dass keine Librationsungleichheit vorkomme, so wäre diese mit der Voraussetzung gleichbedeutend, dass keine der Grössen k_m, auch nicht nach Berücksichtigung der aus Gliedern höherer Ordnung veranlassten Correctionen, grösser als 1 sein könne. Eine solche Voraussetzung wäre auch, wie wir aus unseren Untersuchungen bereits gesehen haben, mit derjenigen identisch, dass die bekannten Entwicklungen — in dem Abschnitte I durch die Gleichungen (3) und (5) angegeben — gleichförmig convergent wären. Man hätte also grade dasjenige von vorn herein angenommen, was erst als Resultat aus der Untersuchung hervorgehen kann. Indem wir aber, bei unsern Untersuchungen, eine Annahme in diesem

Sinne gar nicht in Frage gestellt haben, sind wir bei dem Resultate angelangt, dass, wenn die Reihen (3) und (5) des vorhergehenden Abschnittes — immer von den mit F und F_1 bezeichneten Gliedern abgesehen — nicht convergiren, so muss wenigstens eine der Grössen k_m die Einheit übersteigen, womit diese Entwicklungen ihre Bedeutung überhaupt verlieren. In diesem Falle existirt eine Librationsungleichheit, und wir werden im nächsten Abschnitte sehen, dass wenn der Coefficient dieses Gliedes, welcher eine Integrationsconstante ist, einen hinreichend kleinen Werth hat, die Reihe der characteristischen Glieder welche dem Librationsgliede folgen, auch nach der doppelten Integration eine gleichförmig convergente Reihe sein wird.

III.

Unsern jetzt vorzunehmenden Untersuchungen legen wir die Gleichung (2) des ersten Abschnittes zu Grunde, nachdem wir in derselben

$$\zeta = c + nt + Z; \qquad \zeta' = c' + n't$$

gesetzt haben.

Indem wir von dem ersten Gliede voraussetzen, dass es kritisch werde, bezeichnen wir:

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} 2V &= (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ + sc - s'c' + B \\ 2(X) &= - sA_1 \sin[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_1] \\ &\quad - sA_2 \sin[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_2 n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_2] \\ &\quad - \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

wonach die betreffende Gleichung nachstehende Gestalt annimmt:

$$(2)\qquad \frac{d^2V}{dt^2} + n^2 sA \sin V \cos V = n^2(X)$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Coefficienten der Glieder in X sehr kleine Grössen in Verhältniss zu A sind, dass aber die ganzen Zahlen s_1, s_1' und noch mehr s_2, s_2' sehr erhebliche Werthe haben.

Wir setzen hierauf:

$$V = V_0 + V_1$$

und entwickeln die Function:

$$\sin V \cos V = \frac{1}{2} \sin 2 (V_0 + V_1)$$

nach den Potenzen von $2 V_1$. Diese Entwicklung, welche bekanntlich immer convergirt, ist die nachstehende:

$$\sin V \cos V = \sin V_0 \cos V_0 \left(1 - \frac{4 V_1^2}{1.2} + \frac{16 V_1^4}{1.2.3.4} - \ldots \right)$$

$$- (2 \sin V_0^2 - 1)\left(V_1 - \frac{4 V_1^3}{1.2.3} + \ldots \right)$$

Es seien nun: $h_2, h_4, \ldots$ die constanten Glieder in $V_1^2, V_1^4, \ldots$: ferner sei:

$$\alpha^2 = sA\left(1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \ldots \right) \tag{3}$$

und:

$$X = (X) - sA\left(- \frac{4(V_1^2 - h_2)}{1.2} + \frac{16(V_1^4 - h_4)}{1.2.3.4} - \ldots \right) \sin V_0 \cos V_0 \tag{4}$$

$$+ sA\left(- \frac{4 V_1^3}{1.2.3} + \frac{16 V_1^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \right)(2 \sin V_0^2 - 1);$$

die Gleichung (2) können wir nun in zwei andere zerlegen, nehmlich in:

$$\frac{d^2 V_0}{dt^2} + n^2 \alpha^2 \sin V_0 \cos V_0 = 0 \tag{5}$$

und:

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} - n^2 \alpha^2 (2 \sin V_0^2 - 1) V_1 = n^2 X \tag{6}$$

Die Gleichung (5) giebt uns sofort:

$$V_0 = \operatorname{am} \xi \ (\mathrm{mod} = k).$$

wenn wir setzen:

$$\xi = \gamma n t + C; \quad k = \frac{\alpha}{\gamma},$$

und mit γ und C die beiden Integrationsconstanten bezeichnen. Nachdem wir diesen Werth von V_0 in die Gleichung (6) eingeführt, und nt durch $\frac{1}{\gamma} d\xi$ ersetzt haben, nimmt diese Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - k^2(2 \operatorname{sn} \xi^2 - 1) V_1 = \frac{1}{\gamma^2} X \tag{7}$$

Das Integral dieser sogenannten LAMÉ'schen Gleichung ist bekannt; wir schreiben es am kürzesten, wie folgt, wobei wir die beiden Integrationsconstanten mit c_1 und c_2 bezeichnen, und E die Bedeutung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung hat,

$$V_1 = c_1 \operatorname{dn} \xi + c_2 \operatorname{dn} \xi \left[\frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K} \xi \right] + \frac{\operatorname{dn} \xi}{\gamma^2 k'^2} \int \frac{k'^2 d\xi}{\operatorname{dn} \xi^2} \int X \operatorname{dn} \xi d\xi \tag{8}$$

Vermöge der Relation:

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn} \xi^2} = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \Theta_3(\xi)}{d\xi^2}$$

lässt sich die vorstehende Formel indessen auf eine andere Form bringen, wodurch sie unserm Zwecke besser entspricht. Wir finden nach einer leichten Rechnung:

$$\begin{aligned} V_1 = {} & c_1 \operatorname{dn} \xi + c_2 \operatorname{dn} \xi \left[\frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K} \xi \right] \\ & + \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \left\{ \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} \int X \operatorname{dn} \xi d\xi - \operatorname{dn} \xi \int X \operatorname{dn} \xi \frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} d\xi \right\} \\ & + \frac{E}{\gamma^2 k'^2 K} \operatorname{dn} \xi \int d\xi \int X \operatorname{dn} \xi d\xi \end{aligned} \tag{9}$$

Bei diesen Formeln wollen wir zunächst etwas stehen bleiben und an dieselbe einige Bemerkungen knüpfen, welche indessen die mit den Integrationsconstanten multiplicirten Gliedern nicht berühren. Wir lassen

daher diese Glieder bei Seite, indem wir die Integrationsconstanten, die in der That überzählig sind, entweder als gleich Null gesetzt denken, oder auch als in solcher Weise bestimmt, dass Glieder, welche die Veränderliche ξ als Factor erhalten, verschwinden.

Wir ziehen jetzt die Fälle nicht in Betracht, wo der Modul k den Grenzwerth 1 erreicht, wiewohl wir anderseits solche nicht ausschliessen, wo diese Grösse sich der erwähnten Grenze ziemlich nähert. Die, dem Modul k entsprechende Grösse q nehmen wir aber auf alle Fälle so klein an, dass ein Glied, welches mit derselben multiplicirt wird, wesentlich verkleinert erscheint. Wir bemerken übrigens, dass wenn ein mit dem Factor q multiplicirtes Glied einigermassen erheblich wird, so bewirkt es, wie man aus der Gleichung (3) ersehen kann, eine Verkleinerung in α^2, mithin auch in k und in q. Die zweite Annäherung müsste das betreffende Glied also verkleinert ergeben, und man würde, wenn nur solche Glieder vorhanden wären, das Resultat durch successive Annäherungen verhältnissmässig leicht finden können.

Um nun die Darstellung der Formeln etwas zu vereinfachen, schreiben wir:

$$sn - s'n' + \sigma n = 2n\lambda; \qquad sc - s'c' + B = 2\Delta$$

$$s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n = 2n\lambda_1; \qquad s_1 c - s_1' c' + B_1 = 2\Delta_1$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

und betrachten bloss Fälle, wo:

$$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$$

Aus dem Vorhergehenden wissen wir bereits, dass bei der Bestimmung der entsprechenden Glieder in V_1 nur dann Schwierigkeiten eintreten können, wenn λ_1 eine im Verhältniss zu λ sehr kleine Grösse bezeichnet. Wäre hingegen λ_1 eine Grösse von nahezu demselben numerischen Betrage wie λ, oder grösser, dann könnte das entsprechende Glied in V_1 sehr leicht berechnet werden, weil A_1 jedenfalls sehr klein im Verhältniss zu A ist, so oft k überhaupt der Einheit nahe kommen kann; in diesen Fällen würde das betreffende Glied offenbar als eine sehr kleine Grösse anzusehen sein. Wäre λ_1 sehr nahe gleich λ, so könnte allerdings ein Glied in V_1 einen sehr grossen Factor erhalten; dieses Glied ist aber

anderseits mit q multiplicirt und würde aus diesem Grunde eine entsprechende Verkleinerung erleiden. Derartige Glieder, bei deren Bestimmung keine wesentlichen Schwierigkeiten zu erwarten stehen und überdies mit später zu berücksichtigenden Gliedern vereinigt werden können, lassen wir jetzt ganz bei Seite.

Wenn wir aber auch die Glieder in der Formel (9), die mit q multiplicirt erscheinen, im Allgemeinen vernachlässigen, so dürfen wir dies jedoch nicht ohne jede Einschränkung thun, da dies gleichbedeutend damit wäre, dass wir in der Gleichung (7) ohne weiteres das Glied:

$$-k^2(2\,\mathrm{sn}\,\xi^2 - 1)V_1$$

bei Seite liessen. Dieses Glied ist aber bei der Bestimmung der Function V_1 ganz wesentlich, denn die Entwicklung des Coefficienten von V_1 enthält eine Constante von der Ordnung k^4, welcher Umstand einen sehr erheblichen Einfluss auf die Integrationsdivisoren ausüben kann. Wenn wir daher auch bei einer solchen Vernachlässigung annehmen dürften, dass das Resultat der ersten Annäherung als eine wirkliche Annäherung anzusehen wäre — die Gründe zu dieser Annahme finden sich leicht durch ein genaueres Betrachten der Gleichung (8) — so müssten wir doch befürchten, in solcher Weise nur sehr langsam convergirende Annäherungen zu erhalten.

Um nun leicht übersehen zu können, welche Glieder bei der ersten Annäherung bei Seite gelassen werden dürfen, ersetzen wir in der Gleichung (8) die Function V_1 durch eine andere Z_1 und stellen zwischen beiden die Beziehung:

$$2V_1 = sZ_1\,\mathrm{dn}\,\xi \tag{10}$$

fest. Aus der Gleichung (8) ergiebt sich hierauf, durch doppelte Differentiation und nachdem die elliptische Function $\frac{k'^2}{\mathrm{dn}\,\xi^2}$ durch das zweite Differential von $\log\theta_3(\xi)$ ersetzt worden ist, die nachstehende:

$$\frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{d\xi^2} = \frac{1}{\gamma^2k'^2}\left|\frac{E}{K}X + \frac{d^3\log\theta_3(\xi)}{d\xi^3}\int X\,\mathrm{dn}\,\xi\,d\xi + \frac{d^2\log\theta_3(\xi)}{d\xi^2}X\,\mathrm{dn}\,\xi\right|$$

oder

$$(11) \qquad \frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{n^2dt^2} = \frac{1}{k'^2}\frac{E}{K}X + \frac{1}{k'^2}\frac{d\left\{\frac{d^2\log\Theta_3(\xi)}{d\xi^2}\int X\,\mathrm{dn}\,\xi\,d\xi\right\}}{d\xi}$$

Wenn wir nun von den Gliedern in X absehen, die von den Argumenten $2\lambda_2 nt$, $2\lambda_3 nt$, ... abhängen, so haben wir die nachstehenden Argumente zu berücksichtigen:

$$2\lambda_1 nt, \qquad 2(\lambda + \lambda_1)nt, \qquad 2(\lambda - \lambda_1)nt, \quad \text{u. s. w.}$$

Man übersieht leicht, dass bloss das von $\lambda_1 nt$ abhängige Glied in Z_1 wesentlich vergrössert werden kann, weil λ_1 im Allgemeinen eine kleine Grösse im Verhältniss zu $\lambda + \lambda_1$, $\lambda - \lambda_1$, u. s. w. ist; die übrigen Glieder erhalten bei dem Integrationsprocesse wesentlich grössere Divisoren. Wir betrachten also bloss das, von dem erwähnten Argumente abhängige Glied und bemerken dabei, dass der Beitrag zu dem Coefficienten dieses Gliedes, welcher aus dem zweiten Gliede rechter Hand in der Gleichung (11) hervorgeht, erheblich geringer ist, als der aus $\frac{1}{k'^2}\frac{E}{K}X$ kommende Theil. In der ersten Annäherung setzen wir daher:

$$(12) \qquad \frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{dt^2} = \frac{n^2}{k'^2}\frac{E}{K}X$$

In Berücksichtigung von (10) erhalten wir aus der ersten der Gleichungen (1):

$$(13) \qquad Z = \frac{2}{s}(V_0 - \lambda nt - \Delta) + Z_1\,\mathrm{dn}\,\xi$$

Nun sind die Integrationsconstanten γ und C jedenfalls so zu bestimmen, dass die Function $V_0 - \lambda - \Delta$ nur periodische Glieder des Arguments $\frac{\pi}{K}\xi$ enthält; d. h. gemäss den Gleichungen:

$$\frac{\pi}{2K}\gamma = \lambda; \qquad \frac{\pi}{2K}C = \Delta;$$

in dem Argumente:

$$2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z_1\,\mathrm{dn}\,\xi + 2\Delta_1 + 2\frac{s_1}{s}[V_0 - \lambda nt - \Delta]$$

kommt also die Zeit als Factor des Coefficienten bloss bei dem Gliede $2\lambda_1 nt$ vor. Wir bezeichnen hier:

$$(14) \qquad s_1 Z_1\left(\mathrm{dn}\,\xi - \frac{\pi}{2K}\right) + 2\frac{s_1}{s}(V_0 - \lambda nt - \Delta) = H$$

und erhalten:

$$(15) \qquad 2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1 = 2\lambda_1 nt + s_1\frac{\pi}{2K}Z_1 + 2\Delta_1 + H$$

Hier angelangt, werden wir von einem Satze Gebrauch machen, welcher bei Entwicklung der Function:

$$P = e^{2i(x_1 \sin L_1 + x_2 \sin L_2 + \ldots)},$$

sich ergiebt, wo die x constante Coefficienten bezeichnen, die eine gleichförmig convergente Reihe bilden, und die L beliebige reelle Argumente sind.

Wie man leicht bemerkt, nimmt das Resultat der Entwicklung die nachstehende Form an:

$$\begin{aligned}
P = P_0 &+ 2P_2^{(1)}\cos 2L_1 + 2P_2^{(2)}\cos 2L_2 + \ldots \\
&+ 2P_{1,1}^{1,2}\cos(L_1 + L_2) + 2P_{1,-1}^{1,2}\cos(L_1 - L_2) \\
&+ 2P_{1,1}^{1,3}\cos(L_1 + L_3) + 2P_{1,-1}^{1,3}\cos(L_1 - L_3) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 2P_4^{(1)}\cos 4L_1 + 2P_4^{(2)}\cos 4L_2 + \ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ 2i\Big\{ &Q_1^{(1)}\sin L_1 + Q_1^{(2)}\sin L_2 + \ldots \\
&+ Q_{1,2}^{1,2}\sin(L_1 + 2L_2) + Q_{1,-2}^{1,2}\sin(L_1 - 2L_2) \\
&+ \ldots\ldots \Big\}
\end{aligned}$$

Indem man überall $-L_1, -L_2, \ldots$ anstatt $+L_1, +L_2, \ldots$ einführt, erhält man unmittelbar die nachstehende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P} = P_0 &+ 2P_2^{(1)}\cos 2L_1 + 2P_2^{(2)}\cos 2L_2 + \ldots \\
&+ 2P_{1,1}^{1,2}\cos(L_1 + L_2) + 2P_{1,-1}^{1,2}\cos(L_1 - L_2) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
- 2i\Big\{ &Q_1^{(1)}\sin L_1 + Q_1^{(2)}\sin L_2 + \ldots \\
&+ Q_{1,2}^{1,2}\sin(L_1 + 2L_2) + Q_{1,-2}^{1,2}\sin(L_1 - 2L_2) \\
&+ \ldots\ldots \Big\}
\end{aligned}$$

Wenn wir hierauf diese Entwicklungen von P und von $\frac{1}{P}$ mit einander multipliciren, erhalten wir eine Anzahl Bedingungsgleichungen, von denen wir indessen nur die erste anzuführen brauchen. Diese ist:

$$1 = (P_0)^2 + 2(P_2^{(1)})^2 + \ldots$$
$$+ 2(Q_1^{(1)})^2 + \ldots;$$

d. h.: die doppelte Summe der Quadrate aller Coefficienten weniger des Quadrates des ersten Coefficienten ist gleich der Einheit. Hieraus folgt, dass kein Coefficient grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein kann, mit Ausnahme des ersten, welcher den Werth 1 erhält, wenn alle anderen verschwinden.

Berücksichtigen wir nun in X bloss das Glied:

$$-\frac{s}{2} A_1 \sin(2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1),$$

indem wir dasselbe in der Gleichung (12) hervorheben, so erlangen wir leicht ein Resultat der Form:

$$\frac{d^2 Z_1}{dt^2} = -\frac{n^2 A_1}{k'^2} \frac{E}{K} P_0 \sin\left(2\lambda_1 nt + s_1 \frac{\pi}{2K} Z_1 + 2\Delta_1\right) + \Pi_1,$$

wo P_0' einen Coefficienten bezeichnet, der jedenfalls kleiner als 1 ist, und Π_1 eine Reihe Glieder, welche theils von den Argumenten $2(\lambda + \lambda_1)nt$, $2(\lambda - \lambda_1)nt$, $2(\lambda + 2\lambda_1)nt$, u. s. w. abhängen, theils aber auch von den Argumenten $2\lambda_2 nt$, $2\lambda_3 nt$, u. s. w. — Wenn für Z_1 einmal ein genäherter Werth gefunden worden ist, lässt sich die Function X in einer solchen Form angeben, dass die im zweiten Gliede rechter Hand der Gleichung (11) geforderte Integration ausgeführt werden kann, wonach die Glieder in Π_1 zu vervollständigen sind.

Die zuletzt gefundene Gleichung multipliciren wir mit $s_1 \frac{\pi}{2K}$, setzen hierauf:

(16) $$\left|\begin{aligned} 2U &= 2\lambda_1 nt + s_1 \frac{\pi}{2K} Z_1 + 2\Delta_1 \\ 2X_1 &= s_1 \frac{\pi}{2K} \Pi_1 \end{aligned}\right.$$

und finden endlich:

$$(17) \qquad \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{n^2 s_1 A_1 P_0}{k'^2} \frac{2\pi E}{(2K)^2} \sin U \cos U = n^2 (X)_1,$$

welche Gleichung genau wie die Gleichung (2) zu behandeln ist.

Man wird also wieder setzen:

$$U = U_0 + U_1$$

und für U_0 ein Resultat der Form:

$$U_0 = \operatorname{am} \xi_1 \pmod{k_1}$$

erhalten. Auch jetzt nehmen wir also an, dass der Modul kleiner als 1 ist.

Es folgt nun aus der ersten der Gleichungen (16):

$$(18) \qquad Z_1 = \frac{2}{s_1} \frac{2K}{\pi} (U_0 - \lambda_1 nt - \Delta_1) + Z_2 \operatorname{dn} \xi_1,$$

indem wir nehmlich setzen: $2U_1 = s_1 \frac{\pi}{2K} Z_2 \operatorname{dn} \xi_1$, und für die Function Z_2 Bestimmungen als gültig ansehen, welche denen analog sind, die zur Bestimmung von Z_1 führten. Der soeben gefundene Werth von Z_1, in die Gleichung (13) eingesetzt, giebt uns endlich:

$$(19) \qquad Z = \frac{2}{s}\left(\operatorname{am} \xi - \frac{\pi}{2K} \xi\right) + \frac{2}{s_1} \frac{2K}{\pi} \left(\operatorname{am} \xi_1 - \frac{\pi}{2K_1} \xi_1\right) \operatorname{dn} \xi + Z_2 \operatorname{dn} \xi \operatorname{dn} \xi_1$$

Diese Operationen lassen sich wiederholen und so lange fortsetzen, als die Moduln k_2, k_3, u. s. w. kleiner als 1 bleiben. Erreicht keiner dieser Moduln die Grenze 1, so erhält man die Function Z durch eine unendliche Reihe dargestellt. Bei dem Fortgange dieser Operationen muss man sich indessen erinnern, dass bei der Bildung der verschiedenen Functionen $(X)_1$, $(X)_2$, u. s. w. Glieder entstehen können, von denen ein Theil mit vorhergehenden characteristischen Gliedern zu vereinigen sind und also die Werthe der vorhergehenden Moduln etwas verändern, während ein anderer Theil der entstehenden Glieder mit späteren characteristischen Glieder vereinigt werden kann, oder als selbständige characteristische Glieder zu behandeln ist. Ein dritter Theil der bei den successiven Operationen entstehenden Gliedern ist aber an kürzere Perioden ge-

bunden und werden dieselben daher nicht in dem Maasse durch den Integrationsprocess vergrössert, dass sie die Convergenz der aus (19) hervorgehenden unendlichen Reihe aufheben könnten. Von diesen Gliedern sehen wir hier ab, und erhalten alsdann die Reihe

$$(20)\qquad Z = \frac{2}{s}\left(\operatorname{am}\xi - \frac{\pi}{2K}\xi\right) + \frac{2}{s_1}\frac{2K}{\pi}\left(\operatorname{am}\xi_1 - \frac{\pi}{2K_1}\xi_1\right)\operatorname{dn}\xi + \frac{2}{s_2}\frac{2K_1}{\pi}\left(\operatorname{am}\xi_2 - \frac{\pi}{2K_2}\xi_2\right)\operatorname{dn}\xi\operatorname{dn}\xi_1 + \ldots;$$

dass diese Reihe gleichförmig convergent ist, sieht man sogleich, da die Coefficienten $\frac{2}{s}, \frac{2}{s_1}, \frac{2}{s_2}, \ldots$ eine gleichförmig convergente Reihe bilden, und die Verhältnisse $\frac{K}{K_1}, \frac{K_1}{K_2}, \ldots$, unsern Annahmen nach, als Grössen derselben Ordnung anzusehen sind, oder jedenfalls eine gegebene Grösse nicht übersteigen.

Wir sind also jetzt bei einem Resultate angelangt, welches mit dem, im ersten Abschnitte gefundenen im Wesentlichen übereinstimmt, nur ist das jetzt erhaltene vollständiger und genauer als das frühere, da hier auch die Glieder höherer Ordnung Berücksichtigung gefunden haben, während sie in dem ersten Abschnitte in den Functionen F und F_1 aufgenommen und mit denselben vernachlässigt wurden. Vollständige Übereinstimmung finden wir aber in dem Punkte, dass die betreffenden Entwicklungen nahezu in derselben Weise convergiren wie die Reihe der Brüche $\frac{1}{s}, \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \ldots$, vorausgesetzt, dass keiner der Moduln $k, k_1, k_2, \ldots$ der Einheit gar zu nahe kommt aber auch nicht für sich eine convergente Reihe bilden.

Nachdem wir somit den Fall erledigt haben, wo die Moduln $k, k_1, \ldots$ sämmtlich kleiner als 1 waren, stellen wir die Annahme fest, dass einer derselben diese Grenze überschreitet. Hiermit wird nothwendig die Bedingung verknüpft, dass der entsprechende Factor λ streng verschwindet. Im Ganzen ist es bei unseren jetzigen Betrachtungen gleichgültig, von welchem Gliede wir annehmen, dass dieser Factor gleich Null wird, und wir dürfen daher die Bestimmung treffen, dass es bei dem ersten Gliede in der Reihe (2) des ersten Abschnittes stattfindet. Es wird nun:

$$2V = sZ + 2\Delta$$

und für V_0 erhalten wir, wie im zweiten Abschnitte gezeigt wurde, den Ausdruck

$$V_0 = \arcsin[l \operatorname{sn}(\alpha n t + C_1)] \quad \left(\mod l = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Hiermit findet sich aus der Gleichung (6), nachdem wir:

$$\eta = \alpha n t + C_1 = k\xi = \frac{1}{l}\xi$$

gesetzt haben, die folgende:

$$(21) \qquad \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}\eta^2 - 1) V_1 = \frac{1}{\alpha^2} X$$

welche Gleichung sich übrigens aus der Gleichung (7) ergiebt, wenn man sich erinnert, dass

$$\operatorname{sn}\xi = l \operatorname{sn}\eta$$

Weil man aber überdies die Beziehungen:

$$\operatorname{dn}\xi = \operatorname{cn}\eta$$

$$\frac{k'^2}{\operatorname{cn}\eta^2} = \frac{L - I}{L} - l^2 - \frac{d^2 \log \Theta_2(\eta)}{d\eta^2}$$

hat, wobei I den Werth von E bedeutet, welcher dem Modul l entspricht, so findet sich aus der Gleichung (8):

$$(22) \qquad V_1 = c_1 \operatorname{cn}\eta - c_2 \operatorname{cn}\eta \left[\frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L}\eta\right] + \frac{\operatorname{cn}\eta}{\alpha^2} \int \frac{d\eta}{\operatorname{cn}\eta^2} \int X \operatorname{cn}\eta\, d\eta$$

und hieraus folgert man leicht die nachstehende, welche der Gleichung (9) entspricht,

$$(23) \qquad V_1 = c_1 \operatorname{cn}\eta - c_2 \operatorname{cn}\eta \left[\frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L}\eta\right] + \frac{1}{\alpha^2 l'^2} \operatorname{cn}\eta \int X \operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} d\eta - \operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} \int X \operatorname{cn}\eta\, d\eta + \frac{L - I - l^2 L}{\alpha^2 l'^2 L} \operatorname{cn}\eta \int d\eta \int X \operatorname{cn}\eta\, d\eta$$

In dieser Gestalt ist der gefundene Ausdruck für V_1 indessen nicht ganz zweckmässig, weil die Function $d\log\theta_2(\eta)$ den Factor $\cos\frac{\pi}{2L}\eta$ im Nenner enthält. Es ist aber:

$$\frac{d\log\theta_2(\eta)}{d\eta} = \frac{d\log\theta(\eta)}{d\eta} - \frac{\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta}{\operatorname{cn}\eta}$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung erhalten wir aus (23):

$$(24)\quad V_1 = c_1\operatorname{cn}\eta - c_2\left\{\operatorname{cn}\eta\left[\frac{d\log\theta(\eta)}{d\eta} - \frac{L-I-l'^2L}{L}\eta\right] - \operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta\right\}$$

$$+\frac{1}{a^2l'^2}\left[\operatorname{cn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta\frac{d\log\theta(\eta)}{d\eta}d\eta - \operatorname{cn}\eta\frac{d\log\theta(\eta)}{d\eta}\int X\operatorname{cn}\eta d\eta\right]$$

$$-\frac{1}{a^2l'^2}\left[\operatorname{cn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta\operatorname{dn}\eta d\eta - \operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta d\eta\right]$$

$$+\frac{L-I-l'^2L}{a^2l'^2L}\operatorname{cn}\eta\int d\eta\int X\operatorname{cn}\eta d\eta$$

Unsere Betrachtungen, die wir an diese Formel knüpfen, sollen von der Voraussetzung ausgehen, dass der Modul l einen kleinen Werth hat. Die Entwicklungen der Functionen $\operatorname{cn}\eta$, $\operatorname{sn}\eta$, $\operatorname{dn}\eta$ und des Productes der ersteren und $d\log\theta(\eta)$ sind dann sehr convergent, und wir können, da es sich hier nur um den allgemeinen Character des Resultats handelt, bei den ersten Gliedern dieser Entwicklungen stehen bleiben und sogar alle die Glieder bei Seite lassen, welche l^2 als Factor enthalten. Wir erhalten alsdann, wenn wir dabei die überzähligen Integrationsconstanten c_1 und c_2 gleich Null setzen, den genäherten Werth:

$$V_1 = \frac{1}{a^2}\sin\frac{\pi}{2L}\eta\int X\cos\frac{\pi}{2L}\eta d\eta - \frac{1}{a^2}\cos\frac{\pi}{2L}\eta\int X\sin\frac{\pi}{2L}\eta d\eta,$$

welcher aber eine wirkliche Annäherung zur Bestimmung des Integrales der Gleichung (21) darstellt.

Von den Gliedern in X heben wir zunächst die nachstehenden heraus:

$$X = -\beta_1\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) - \beta_2\sin\left(\frac{2\lambda_2}{a}\eta + H_2\right) - \ldots$$

und diese ergeben, wenn sie in obigem Ausdrucke eingesetzt werden,

$$(25)\qquad V_1 = -\frac{\frac{2L}{\pi}}{\alpha^2}\left\{\frac{\beta_1}{1-\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\eta + H_1\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_2}{1-\left(\frac{2\lambda_2}{\alpha}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_2}{\alpha}\eta + H_2\right) + \ldots\right\}$$

Die Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ bilden nun jedenfalls, weil sie den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ proportional sind, eine gleichförmig convergente Reihe; die soeben gefundene Entwicklung von V_1 convergirt daher auch gleichförmig, so lange die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ kleine Grössen im Verhältniss zu $\frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{2L}$ sind. Wir gewinnen auf Grund dieses Resultates den Satz, den wir schon am Schlusse des zweiten Abschnittes erwähnt haben, dass nehmlich die Glieder, welche auf ein Librationsglied folgen und ohne das Vorhandensein dieses Gliedes kritisch werden könnten, eine gleichförmig convergente Reihe bilden. Die Anwendung des vollständigen Ausdruckes (24) statt des abgekürzten würde keine Abänderung dieser Schlussfolgerung veranlassen.

Die Reihe (25) convergirt aber gleichförmig auch bei anderen Werthen der Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als den oben bezeichneten; die Convergenz kann dagegen aufhören, wenn die Verhältnisse:

$$\frac{2\lambda_1}{\alpha}\frac{2L}{\pi},\ \frac{2\lambda_2}{\alpha}\frac{2L}{\pi},\ \ldots$$

sich der Einheit mehr und mehr nähern. Bei Anwendung der vollständigen Formel (24) würde man finden, dass Divergenz eintreten kann, auch wenn diese Verhältnisse sich anderen ganzen Zahlen nähern. Dass diese Erscheinung jedoch nicht gleichbedeutend mit einer wirklichen Divergenz der Entwicklung von V_1 ist, lässt sich leicht nachweisen, wenn man sich die Ausdrücke der Grössen α^2 und X, wie sie durch die Gleichungen (3) und (4) gegeben sind, vergegenwärtigt. Zunächst sehen wir aus der Gleichung (3), dass wenn ein Glied in V_1 anwächst, so erleidet α^2 eine merkliche Verkleinerung, welche man sich so erheblich denken

kann, dass sich das Librationsglied in ein gewöhnliches verwandelt, wonach die Entwicklungen nach den vorher mitgetheilten Methoden auszuführen wären. Es kann sich also ereignen, dass eine erste Annäherung die Existenz der Libration wahrscheinlich macht, die sich jedoch bei späteren Annäherungen als illusorisch erweist. Die oben gefundenen Entwicklungen kommen alsdann wieder zur Geltung und ihrer Convergenz ist kein Abbruch geschehen.

Wir wollen aber nun den Nachweis führen, dass wenn der Coefficient des Librationsgliedes, also die Constante l, einen genügend kleinen Werth hat, so bleibt auch die Function V_1 immer eine kleine Grösse. Aus der Gleichung (4) nehmen wir die merklichsten Glieder heraus. Diese sind:

$$X = (X) + \frac{2}{3} sAV_1^3;$$

für (X) nehmen wir ferner denselben Ausdruck an, den wir vorhin für X gelten liessen, nehmlich:

$$(X) = -\beta_1 \sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) - \ldots$$

In der Gleichung (21) vernachlässigen wir nun auch das mit l^2 multiplicirte Glied und erhalten, nachdem wir:

$$g = \frac{2}{3}\frac{sA}{a^2}$$

gesetzt haben, die Gleichung:

$$\frac{d^2V_1}{d\eta^2} + V_1 - gV_1^3 = -\frac{\beta_1}{a^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) - \ldots \tag{26}$$

Die Integration von Gleichungen dieser Form ist von hervorragender Wichtigkeit, wenn es sich um die Bestimmung der elementären Glieder handelt. Hier tritt dieselbe jedoch weniger in den Vordergrund, wesshalb ich, unter Hinweisung auf eine der Schwedischen Academie der Wissenschaften vorgelegte Abhandlung über die Integration der betreffenden Gleichung,[1] mich auf die Mittheilung des folgenden Verfahrens beschränke.

[1] Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. 1886.

Der grösseren Einfachheit wegen betrachten wir bloss ein einziges Glied rechter Hand in der Gleichung (26) und setzen:

$$(\alpha) \qquad V_1 = (\varkappa_0 + \Delta\varkappa_0)\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right) + R_1$$

Wenn wir nun die Constante $\varkappa_0$ aus der Gleichung:

$$(\beta) \qquad \frac{3}{4}g\varkappa_0^3 - \left[1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2\right]\varkappa_0 = \frac{\beta_1}{a^2}$$

bestimmen, so bleibt aus der Gleichung (26), wenn wir der Kürze wegen

$$\varkappa = \varkappa_0 + \Delta\varkappa_0$$

schreiben, die Gleichung:

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2R_1}{d\eta^2} + \left[1 - 3\varkappa^2 g \sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right)^2\right]R_1$$

$$= -\frac{1}{4}\varkappa^3 g \sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) + 3\varkappa g \sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right)R_1^2 + gR_1^3$$

$$+ \Delta\varkappa_0\left[1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2 - \frac{9}{4}g\varkappa_0^2 - \frac{9}{4}g\varkappa_0\Delta\varkappa_0 - \frac{3}{4}g\Delta\varkappa_0^2\right]\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right)$$

Über die Grösse $\Delta\varkappa_0$ haben wir noch zu verfügen, und wir denken sie als in der Weise bestimmt, dass die Function R_1 kein Glied mit dem Argumente $\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1$ enthält. Nachdem wir diese Annahme festgestellt haben, setzen wir:

$$(\delta) \qquad R_1 = \varkappa_1 \sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right) + R_2;$$

es ergiebt sich alsdann ein Näherungswerth des Coefficienten $\varkappa_1$ aus der Gleichung:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{3}{4}g\varkappa_1^3 - \left[1 - 9\left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2 - \frac{3}{2}g\varkappa^2\right]\varkappa_1 = \frac{1}{4}g\varkappa^3$$

Unsern früheren Annahmen gemäss ist nun das Verhältniss $\frac{\beta_1}{a^2}$ als eine sehr kleine Grösse anzusehen, während der Coefficient g als eine

Grösse nullter Ordnung betrachtet werden muss, welche nicht viel von dem Bruche $\frac{2}{3}$ verschieden ist. Unter solchen Umständen erweist sich der Coefficient $\varkappa_0$ auch als eine kleine Grösse, wie aus der Gleichung (β) zu ersehen ist; in dem Falle, den wir hier besonders im Auge haben, wo das Verhältniss $\frac{2\lambda_1}{\alpha}$ nahezu den Werth 1 hat, erhält man näherungsweise:

$$\varkappa_0 = \sqrt[3]{\frac{2\beta_1}{\alpha^2}}$$

Der aus dieser Formel sich ergebende Werth von $\varkappa_0$ ist nun zwar sehr viel grösser als $\frac{\beta_1}{\alpha^2}$, muss jedoch immer als eine kleine Grösse, ja sogar als eine sehr kleine Grösse angesehen werden.

Aus der Gleichung (ε) ergiebt sich sogleich, dass bei der Annahme, $\frac{2\lambda_1}{\alpha}$ habe nahezu den Werth 1, der Coefficient $\varkappa_1$ eine Grösse von der Ordnung $\varkappa_0^3$ ist, und hiernach folgt endlich, aus der Bedingung, wodurch $\Delta\varkappa_0$ zu bestimmen ist, dass dieser Coefficient ebenfalls eine Grösse der Ordnung $\varkappa_0^3$ sein muss.

In dieser Weise kann man weiter gehen, und findet somit für V_1 die gleichförmig convergente Reihe:

$$(27)\quad V_1 = \varkappa \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \varkappa_1 \sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \varkappa_2 \sin 5\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \dots$$

welche ein particuläres Integral der Gleichung (26) ist, und woraus man, unter Berücksichtigung des oben, hinsichtlich der Coefficienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ Gesagten, sogleich bemerkt, dass V_1 eine Grösse bezeichnet, die jedenfalls kleiner als 1 ist.

Die obigen Schlussfolgerungen verlieren aber ihre Bedeutung in dem Maasse, wie der Modul l sich der Einheit nähert. Wenn nehmlich diese Grösse nicht ganz klein ist, so muss man für g den Werth:

$$g = \frac{2}{3}\frac{sA}{\alpha^2}(1 - l^2)$$

setzen, welcher kleiner wird, je näher l der Einheit rückt. — Da nun,

bei Verschwinden der Differenz: $1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2$, die Gleichung ($\beta$) den Werth:

$$\varkappa_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{\beta_1}{g a^2}}$$

ergiebt, so schliesst man, dass der Coefficient $\varkappa_0$ und mithin auch die Function V_1 beträchtliche Werthe annehmen können.

Es ist noch zu bemerken, dass Glieder, wo $\frac{2\lambda_1}{a}$ sehr nahe den Werth 1 haben, nothwendig vorkommen müssen; denn hat man in der ersten Annäherung z. B. das Glied:

$$V_1 = -\frac{\frac{2L}{\pi}}{a^2}\frac{\beta_1}{1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right)$$

gefunden, wo nun λ_1 eine sehr kleine Grösse bezeichnet, so findet man in der zweiten, wie man aus der Gleichung (4) leicht ersehen kann, Glieder mit Argumenten der Form:

$$\left(\frac{\pi}{2L} \pm \frac{4\lambda_1}{a}\right)\eta,$$

also grade solche Glieder, die in der Formel (25) sehr erheblich anwachsen können. Man wird also immer Veranlassung finden, einige Glieder nach den Regeln, welche zur Ermittelung des Integrales der Gleichung (26) führen, zu behandeln, sofern nicht der Modul l verschwindend klein ist, wobei die Glieder der soeben erwähnten Art ebenfalls verschwindend klein bleiben, oder wenigstens so klein, dass sie der Formel (25) einverleibt werden können.

Aus diesen Betrachtungen geht also hervor, dass l der Einheit nicht beliebig nahe kommen darf, ohne dass die Convergenz der aus (24) zu erhaltenden Entwicklung zweifelhaft wird, dass aber, wenn l einen gewissen Werth nicht übersteigt, diese Entwicklung ganz sicher convergirt. Nähert sich aber l dieser Grenze, so ist hiermit eine Vergrösserung von V_1 nothwendig verbunden, woraus wieder, wie bereits hervorgehoben wurde, eine Verkleinerung von α folgt. Man würde somit entweder auf

den ersten Fall zurückkommen, d. h. auf den, wo $k < 1$, oder auch auf einen dritten, wo die Gleichung:

$$k = l = 1$$

entweder streng, oder doch sehr nahe erfüllt ist.

Fälle, wo der Modul der Einheit so nahe kommt, dass die bekannten Entwicklungen der elliptischen Functionen in trigonometrischen Reihen nicht mehr hinreichend convergiren, dürfen nun allerdings, nach unseren jetzigen Kenntnissen zu schliessen, als sehr unwahrscheinlich bezeichnet werden — dies war wenigstens die Ansicht von LAPLACE;[1] von astronomischem Gesichtspunkte aus scheint die Betrachtung derartiger Fälle also wenig Interesse darzubieten. In rein theoretischer Hinsicht ist die Untersuchung derselben hingegen mehr beachtenswerth, schon um zu entscheiden, ob die entsprechenden Formeln Bestand haben können. Denn es liesse sich sehr wohl denken, dass *solche* Werthe des Moduls nur in der ersten Annäherung gefunden werden können, bei den späteren aber, in Folge erheblicherer Werthe der Coefficienten in V_1, wesentlich verkleinert erscheinen müssen.

Die Formeln zur Berechnung von V_0 und V_1, in denen die elliptischen Functionen den complementären Moduln k' und l' entsprechen, finden sich leicht aus den vorhergehenden mit Hülfe bekannter Transformationsformeln. Um bei dem Übergang sowie bei der Darstellung der neuen Formeln möglichst an Kürze zu gewinnen, stellen wir ein für alle Mal fest, dass wenn das Argument einer elliptischen oder einer Theta-Function als imaginär angegeben wird, diese Function einem complementären Modul angehört, und zwar, wenn das Argument $i\xi$ ist, dem Modul k', während die Functionen des Arguments $i\eta$ von dem Modul l' abhängen. Nach dieser Übereinkunft gelten die Formeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}\xi &= -i\frac{\operatorname{sn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi} = -il\frac{\operatorname{sn}i\eta}{\operatorname{cn}i\eta} = l\operatorname{sn}\eta \\
\operatorname{cn}\xi &= \frac{1}{\operatorname{cn}i\xi} = \frac{\operatorname{dn}i\eta}{\operatorname{cn}i\eta} = \operatorname{dn}\eta \\
\operatorname{dn}\xi &= \frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi} = \frac{1}{\operatorname{cn}i\eta} = \operatorname{cn}\eta
\end{aligned}$$

[1] *Mécanique céleste.* T. IV, p. 66, éd. 1880.

Wir erwähnen noch zum Überfluss, dass I' die Bedeutung des vollständigen elliptischen Integrales zweiter Gattung hat, welches dem Modul l' entspricht und erinnern an die Beziehungen:

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn}\xi^2} = \frac{K'-E'}{K'} + \frac{d^2\log\theta_3(i\xi)}{d\xi^2}$$

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn}\xi^2} = -\frac{l'^2}{l^2\operatorname{cn}\eta^2} = \frac{l^2L'-I'}{l^2L'} + \frac{1}{l^2}\frac{d^2\log\theta(i\eta)}{d\eta^2}.$$

$$\frac{d^2\log\theta_3(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{\pi}{2KK'} + \frac{d^2\log\theta_3(i\xi)}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2\log\theta_2(\eta)}{d\eta^2} = -\frac{\pi}{2LL'} + \frac{d^2\log\theta(i\eta)}{d\eta^2}$$

$$\frac{\pi}{2KK'} = \frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1; \qquad \frac{\pi}{2LL'} = \frac{I}{L} + \frac{I'}{L'} - 1$$

Hiernach findet sich aus einer der Gleichung (8) oder (22):

(28)
$$V_1 = c_1\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi} + c_2\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi}\left|\frac{d\log\theta_3(i\xi)}{d\xi} + \frac{K'-E'}{K'}\xi\right|$$
$$+\frac{1}{\gamma^2k'^2}\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi}\int\limits_0^{}\frac{d^2\log\theta_3(i\xi)}{d\xi^2}d\xi\int\limits_0^{} X\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi}d\xi$$
$$+\frac{1}{\gamma^2k'^2}\frac{K'-E'}{K'}\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi}\int\limits_0^{}d\xi\int\limits_0^{} X\frac{\operatorname{dn}i\xi}{\operatorname{cn}i\xi}d\xi$$

(29)
$$V_2 = \frac{c_1}{\operatorname{cn}i\eta} + \frac{c_2}{\operatorname{cn}i\eta}\left|\frac{d\log\theta(i\eta)}{d\eta} + \frac{l^2L'-I'}{L'}\eta\right|$$
$$-\frac{1}{a^2l'^2}\frac{1}{\operatorname{cn}i\eta}\int\limits_0^{}\frac{d^2\log\theta(i\eta)}{d\eta^2}d\eta\int\limits_0^{}\frac{Xd\eta}{\operatorname{cn}i\eta}$$
$$-\frac{1}{a^2l'^2}\frac{l^2L'-I'}{L'}\frac{1}{\operatorname{cn}i\eta}\int\limits_0^{}d\eta\int\limits_0^{}\frac{Xd\eta}{\operatorname{cn}i\eta}$$

In diesen Formeln bemerken wir vor Allem, dass die Entwicklung des einen aus der des anderen erhalten wird, indem man q' in $-q'$ ver-

ändert und die Argumente vertauscht; ferner, dass kein Coefficient unendlich gross wird, wenn k' oder l' verschwindet.

Das erste Doppelintegral in diesen Formeln lässt sich, wie man leicht bemerkt, durch zwei einfache ersetzen; man erhält, wenn die mit den willkürlichen Constanten multiplicirten Glieder, die natürlich ungeändert werden, weggelassen werden,

$$(30)\quad V_1 = \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} \frac{d \log \theta_3(i\xi)}{d\xi} \int X \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} d\xi - \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} \int X \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} \frac{d \log \theta_3(i\xi)}{d\xi} d\xi$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{K' - E'}{K'} \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} \int d\xi \int X \frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi} d\xi$$

$$(31)\quad V_1 = -\frac{1}{a^2 l'^2} \frac{1}{\mathrm{cn}\, i\eta} \frac{d \log \theta(i\eta)}{d\eta} \int \frac{X d\eta}{\mathrm{cn}\, i\eta} + \frac{1}{a^2 l'^2} \frac{1}{\mathrm{cn}\, i\eta} \int \frac{X}{\mathrm{cn}\, i\eta} \frac{d \log \theta(i\eta)}{d\eta} d\eta$$

$$- \frac{1}{a^2 l'^2} \frac{l^2 L' - l'}{L'} \frac{1}{\mathrm{cn}\, i\eta} \int d\eta \int \frac{X d\eta}{\mathrm{cn}\, i\eta}$$

Es verdient, bevor wir weiter gehen, hier einer Eigenthümlichkeit der angeführten Formeln zu erwähnen, von deren Richtigkeit man sich leicht ohne besondere Darlegung überzeugen kann. Eine jede der Formeln (9), (23), (30) und (31) enthält zwei einfache Integrale und ein Doppelintegral. Diese Glieder sind aber an Grösse in den verschiedenen Formeln sehr verschieden. In der Formel (9) spielt das Doppelintegral die Hauptrolle, indem die beiden einfachen Integrale im Verhältniss zu diesem immer klein bleiben und sogar verschwinden, wenn der Modul den Werth Null annimmt. Bei der Formel (23) verhält es sich grade umgekehrt, indem hier das Doppelintegral verschwindet, wenn der Modul gleich Null wird, und also bei kleinen Werthen dieser Grösse weniger zu den Gliedern in der Function V_1 beiträgt als die beiden einfachen Integrale. In den Formeln (30) und (31) endlich können alle Glieder als Grössen derselben Ordnung angesehen werden, wiewohl man im Allgemeinen, wenn nicht der Modul genau den Werth 1 hat, bei den Doppelintegralen die grössten Coefficienten erwarten muss.

Wir haben noch einige Bemerkungen vorauszuschicken, bevor wir zur Werthermittelung der Glieder in (30) und (31) schreiten. Die erste

bezieht sich auf die Grenze, gegen welche das Product λK convergirt, indem der Modul k sich der Einheit nähert. Mit λ haben wir hier, wie vorher in diesem Abschnitte, die Grösse:

$$\frac{sn - s'n' + \sigma n}{2n}$$

bezeichnet. Damit k gleich der Einheit werde, muss λ verschwinden. Weil aber K zugleich unendlich wird, erscheint das Product λK zunächst unbestimmt.

Das der Zeit proportionale Glied in V findet sich nun einestheils aus der ersten der Gleichungen (1), anderntheils aber aus der Gleichung

$$V_0 = \operatorname{am} \xi,$$

da wir nehmlich die Integrationsconstanten überall so bestimmt denken, dass die Function V_1 kein derartiges Glied enthält. Durch Vergleichen dieser beiden Glieder entsteht die Gleichung:

$$\lambda = \frac{\pi}{2K}\gamma$$

Weil nun:

$$\gamma = \frac{\alpha}{k}$$

so erhält man:

$$\lambda K = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{k}$$

Wenn also k nahezu den Werth 1 hat, so ist das Product λK eine Grösse derselben Ordnung wie α.

Es ergeben sich aus den obigen Gleichungen einige bemerkenswerthe Relationen, nehmlich:

$$\pi\frac{K'}{K} = 2kK'\frac{\lambda}{\alpha}; \qquad \pi\frac{K}{K'} = \frac{\pi\alpha}{\lambda k}\,\frac{\pi}{2K'}$$

woraus ferner folgen:

$$q = e^{-2kK'\frac{\lambda}{\alpha}}; \qquad q' = e^{-\frac{\pi\alpha}{\lambda k}\frac{\pi}{2K'}},$$

welche Formeln zur Berechnung von q und q' Verwendung finden können

wenn k nahe der Einheit ist, und man also in der ersten Annäherung setzen kann:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}; \qquad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$$

Die zweite Bemerkung, die ich hier einschalte, betrifft die Entwicklung der Producte $\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi}$ und $\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \frac{d \log \Theta(i\eta)}{d\eta}$. Schon im zweiten Abschnitte wurden die Entwicklungen von $\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}$ und $\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta}$ gegeben, und zwar in der Form von Partialbrüchen. Aus den angeführten Entwicklungen ersieht man, dass sämmtliche Nenner die Form $1 + q'^{2n} e^{-W}$ haben, wo W gewisse Winkel bezeichnen, die von 0 bis $\frac{2K\pi}{K'}$ wachsen. Der Umstand, dass bloss grade Potenzen von q' in diesen Nennern vorkommen, ermöglicht die späteren Entwicklungen nach den U-Functionen, und zwar so, dass diese Entwicklungen gültig bleiben, auch wenn q' das Zeichen wechselt. Dass analoge Entwicklungen bei oben genannten Producten ausführbar sind, geht aus den nachstehenden Relationen hervor:

$$\frac{d\left\{\frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} \frac{d \log \Theta_3(x)}{dx}\right\}}{dx} = -2q\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{d\left\{\frac{\operatorname{dn} \frac{2K}{\pi} u}{\operatorname{cn} \frac{2K}{\pi} u}\right\}}{dq} - \left(\frac{E}{K} - k'^2\right) \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x}$$

$$\frac{d\left\{\frac{1}{\operatorname{cn} x} \frac{d \log \Theta(x)}{dx}\right\}}{dx} = -2q\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{d\left\{\frac{1}{\operatorname{cn} \frac{2K}{\pi} u}\right\}}{dq} + \frac{K-E}{K} \frac{1}{\operatorname{cn} x}$$

wobei, nach ausgeführter Differentiation hinsichtlich q, das Argument $\frac{2K}{\pi} u$ durch x zu ersetzen ist.[1] Man bemerkt nun sehr leicht, dass durch die bezeichnete Differentiation und nachherige Integration keine Ausdrücke veranlasst werden, welche bei eintretendem Zeichenwechsel von q' unendlich grosse Werthe erhalten könnten.

---

[1] Ausdrücke der im Texte angeführten Gattung finden sich, so viel ich weiss, zum ersten Male in einer Abhandlung von Herrn C. O. Meyer, Crelle's Journal, B. 56.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir den Fall etwas näher betrachten, wo der Modul k' den Werth Null hat, und wir werden besonders festzustellen suchen, ob ein solcher Fall bleibend bestehen kann, oder ob diese Annahme hinsichtlich des Moduls nothwendig auf Ausdrücke führt, welche mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Wäre dies letztere der Fall, dann müsste den absolut gültigen Formeln die Annahme eines Moduls zu Grunde gelegt werden, deren numerischer Werth weniger als die Einheit betrüge, weil ein Anwachsen der Function V_1 die Verkleinerung des Moduls nach sich zieht.

Vor Allem bemerken wir nun die Gleichungen:

$$\sin V_0 = \frac{e^{\xi} - a^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}}$$

$$\cos V_0 = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}},$$

welche unmittelbar aus den Gleichungen (9) oder (10) des zweiten Abschnittes folgen, wenn man die Bezeichnung:

$$\xi = \gamma nt + C$$

in Kraft lässt; und wir können hier sogleich α statt γ, oder η statt ξ schreiben, weil die Gleichheit dieser Grössen eine nothwendige Folge unserer Annahme in Bezug auf den Werth von k ist.

Aus der dritten der erwähnten Gleichungen folgt:

$$\frac{dV_0}{d\xi} = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}}$$

woraus man durch Integration den Werth:

$$V_0 = - 2 \operatorname{arctang}(e^{-\xi}) + \text{Const.},$$

erhält und es ist leicht zu erkennen, dass die Constante gleich $+\frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, damit V_0 mit ξ verschwinde.

Für unsern jetzigen Zweck genügt es, von den Gliedern in der Function (X) ein einziges herauszuheben und das entsprechende in V_1 zu bilden. Die hierzu erforderlichen Operationen sind typisch und finden

ohne Abänderung bei der Behandlung der übrigen Glieder Anwendung. Das betreffende Glied sei:

$$(X) = -\frac{s}{2}A_1 \sin(2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1)$$

Zunächst müssen wir hier die Grösse Z durch die bekannte Function V_0 und durch V_1 ersetzen. Die letztere ist allerdings nicht bekannt, aber wir setzen von derselben voraus, dass sie genügend klein ist, um in einer ersten Annäherung vernachlässigt werden zu dürfen. Der Erfolg wird erweisen, in wiefern eine solche Annahme berechtigt ist oder nicht. — Weil nun der Coefficient λ verschwindet, so gilt die Gleichung:

$$Z = \frac{2}{s} V - \Delta \, ,$$

und wir können hier leicht bemerken, dass die Grössen Z und c mit einander durch Addition verbunden vorkommen. Daher können wir c beliebig wählen, indem dies nur zur Folge hat, dass das in Z etwa vorkommende constante Glied in entsprechender Weise bestimmt wird. Soll nun Z von einem solchen Gliede befreit sein, so muss entweder das constante Glied in V gleich Δ gesetzt werden, oder, wenn V nur veränderliche Glieder enthält, hat man Δ gleich Null anzunehmen. Es wird mithin im letzteren Falle:

$$sc = s'c' - B$$

Für die Function Z nehmen wir also den Werth:

$$Z = -\frac{4}{s}\operatorname{arctang}(e^{-\xi})$$

an. Hieraus könnten wir nun Z in einer, nach den Potenzen von $e^{-\xi}$ fortschreitenden Reihe entwickeln, die bei positiven Werthen von ξ, den Werth Null inclusive, immer convergirt; wir erhalten jedoch in der folgenden Weise eine wesentlich mehr convergente Darstellung der betreffenden Function.

Der soeben angeführte Ausdruck giebt uns:

$$Z = -\frac{4}{s}\arcsin\left(\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}}\right);$$

und setzen wir:

$$\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{1+e^{-2\xi}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

so ist φ eine stets reelle Grösse, welche von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 variirt, indem ξ die Werthe von 0 bis ∞ annimmt. Es finden sich umgekehrt die Ausdrücke:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\xi}}{\sqrt{1+e^{-2\xi}}}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{3\sqrt{2}\, e^{-\xi}}{\sqrt{1+e^{-2\xi}}} - \frac{8\sqrt{2}\, e^{-3\xi}}{\{1+e^{-2\xi}\}^{\frac{3}{2}}}$$

u. s. w.

$$\cos 2\varphi = \frac{2e^{-2\xi}}{1+e^{-2\xi}}$$

u. s. w.

Man findet nun die Function Z durch eine gleichförmig convergente, nach den ungraden Vielfachen von φ fortschreitende Sinusreihe, wonach die folgenden, ebenfalls gleichförmig convergenten Reihen hergestellt werden können:

$$\sin s_1 Z = 2P_1 \sin\varphi + 2P_3 \sin 3\varphi + \dots$$

$$\cos s_1 Z = P_0 + 2P_2 \cos 2\varphi + \dots$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt uns mehrere Bedingungen; unter andern diese:

$$1 = P_0^2 + 2P_1^2 + 2P_2^2 + \dots,$$

aus welcher man eine bereits oben gemachte Bemerkung bestätigt findet, nehmlich, dass P_0 nie den Werth 1 überschreitet, während von den übrigen Coefficienten keiner grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ werden kann.

Das erwähnte Glied in (X) wird nun:

$$(X) = -\frac{s}{2} A_1 [P_0 + 2P_2 \cos 2\varphi + \ldots] \sin(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1)$$

$$-\frac{s}{2} A_1 [2P_1 \sin\varphi + 2P_3 \sin 3\varphi + \ldots] \cos(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1),$$

welchen Werth wir jetzt in die Formel (30) für X einzusetzen haben. Wir begnügen uns jedoch bloss den Theil:

$$X = -\frac{s}{2} A_1 P_0 \sin(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1)$$

zu berücksichtigen, weil die Behandlung der folgenden Glieder des obigen Ausdruckes von der des soeben hervorgehobenen nicht wesentlich verschieden wird.

Zur Erlangung des Resultates sind noch folgende Schritte erforderlich. Wir bemerken die, für verschwindende Werthe von k' gültigen Ausdrücke:

$$\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}}; \qquad \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi} = \frac{1}{4}(e^{\xi} - e^{-\xi})$$

$$\frac{K' - E'}{K'} = \frac{1}{2}$$

und erinnern uns, dass jetzt:

$$\gamma = \alpha,$$

so dass nt durch den Werth:

$$nt = \frac{\xi - C}{\alpha}$$

ersetzt werden kann. Bezeichnen wir überdies:

$$\beta_1 = \frac{s}{2} A_1 P_0; \qquad \Pi_1 = 2\Delta_1 - \frac{2\lambda_1}{\alpha} C,$$

so erhalten wir aus der Formel (30):

$$(32) \qquad V_1 = -\frac{\beta_1}{2\alpha^2}\left| (e^{\xi} - e^{-\xi}) \int \frac{\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)}{e^{\xi} + e^{-\xi}} d\xi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{e^{\xi} + e^{-\xi}} \int \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)(e^{\xi} - e^{-\xi})\, d\xi \right|$$

$$- \frac{2\beta_1}{\alpha^2} \frac{1}{e^{\xi} + e^{-\xi}} \int d\xi \int \frac{\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)}{e^{\xi} + e^{-\xi}} d\xi$$

Die fernere Ausführung der hier angezeigten Operationen können wir bei Seite lassen, da eine vollständige Entwicklung der betreffenden Formeln bei den vorliegenden Untersuchungen nicht beabsichtigt oder erforderlich ist. Wir bemerken aber ohne Mühe, dass der soeben angeführte Ausdruck für die Function V_1 theils Glieder umfasst, welche gar keine Exponentialfunctionen enthalten, theils aber Glieder, die mit $e^{-\xi}$ oder mit Potenzen dieser Grösse multiplicirt sind. Diese letzteren werden nun mit wachsendem ξ sehr bald unmerklich, so dass die Function V_1 im Wesentlichen aus dem Gliede

$$V_1 = \frac{\beta_1}{\alpha^2 + (2\lambda_1)^2} \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)$$

bestehen wird. Da nun die Grösse β_1, in Folge unserer früheren Annahmen, als eine sehr kleine Grösse im Vergleich zu α^2 anzusehen ist, so müssen auch die Werthe der Function V_1 als kleine Grössen betrachtet werden. Die Untersuchung der Glieder, welche mit $\sin\varphi_1 \sin 3\varphi_1, \ldots,$ $\cos 2\varphi, \ldots,$ multiplicirt sind, führt man in derselben Weise aus, wie oben gezeigt wurde. Nachdem man die Ausdrücke für $\sin\varphi, \ldots$ als Functionen von $e^{-\xi}$ substituirt hat, bemerkt man sofort, dass die entsprechenden Glieder in V_1 mit dem Factor $e^{-\xi}$ oder mit ganzen positiven Potenzen dieser Grösse multiplicirt erscheinen und also mit wachsendem ξ sehr rasch abnehmen.

Theils auf Grund dieses Resultates, theils mit Rücksicht auf die im zweiten Abschnitte durchgeführten Untersuchungen in Betreff der nach

den U-Functionen vorgenommenen Entwicklungen, schliessen wir, dass die Darstellung der Function V_1, die wir in der angedeuteten Weise aus der Formel (30) gewinnen können, immer convergent ist, wenn ξ auf positive Werthe beschränkt bleibt. Bei negativen Werthen von ξ würde man zu demselben Resultate gekommen sein, und wir dürfen demnach als bewiesen annehmen, dass V_1 sich für jeden Werth von ξ, in der angezeigten Weise darstellen lässt, sowie dass diese Function immer einen kleinen Werth beibehält. Die Berücksichtigung der Glieder in X, welche aus V_1^2, $V_1^3, \ldots$ herrühren, würde, wie man durch Betrachtung der Gleichung (4) leicht bemerken kann, in diesem Resultate keine Änderung hervorrufen. Auf Grund dieser Ergebnisse müssen wir nun schliessen, dass die Bewegung unter der soeben betrachteten Bedingung, fortbestehen kann.

Wir wollen noch die Bestimmung der Constante C etwas näher beleuchten, wobei es sich erweisen wird, dass dieselbe nicht mehr beliebig sein kann, sondern einer gewissen Bedingung genügen muss, eine nothwendige Folge davon, dass die Constante γ der Bedingung:

$$\gamma = \alpha$$

unterworfen ist.

Die Werthe von Z, V_0 und $\frac{dZ}{dt}$, welche für den Zeitpunkt $t = 0$ gelten, bezeichnen wir mit $(Z)_0$, $(V_0)_0$ und $\left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$, und setzen, in Analogie mit früher gebrauchten Bezeichnungen,

$$c_0 = c + (Z)_0; \qquad n_0 = n + \left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$$

Man findet nun, indem man von den Gliedern in V_1 absieht,

$$2(V_0)_0 = sc_0 - s'c' + B = 2D = \pi - 4 \operatorname{arc\,tang}(e^{-C})$$

$$2\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 = sn_0 - s'n' + \sigma n = \frac{4n\alpha}{e^C + e^{-C}}$$

Die Constante C unterliegt hier der Bedingung, dass aus den beiden Gleichungen genau derselbe Werth für diese Grösse erfolgen muss. — Man bemerkt schliesslich leicht, weil:

$$\cos D = \frac{2}{e^C + e^{-C}}.$$

dass der Bedingung:

$$0 = \cos D^2 - \left(\frac{s n_0 - s' n' + \sigma n'}{2 a n_0}\right)^2 \left(\frac{(s + \sigma) n_0}{s' n'}\right)^2$$

durch die obigen Ausdrücke genügt wird.

Dass aber die Werthe von c_0 und n_0, welche unmittelbar durch Beobachtungen gegeben werden, dieser Gleichung genügen, ist nun allerdings sehr unwahrscheinlich; nichts desto weniger ist die Betrachtung des entsprechenden Specialfalles von wesentlichem Interesse; nachdem wir denselben erledigt haben, und dabei gesehen, dass die Entwicklungen convergiren, sind wir zu der Schlussfolgerung berechtigt, dass unsere Darstellung des Integrals der vorgelegten Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ gleichförmig convergent ist, und zwar nicht nur wenn sämmtliche k_m kleiner als 1 sind, sondern auch, wenn eine dieser Grössen den Werth 1 hat. Mehrere dieser Grössen können, wie man sehr leicht einsieht, nicht diesen Werth haben; es kann nehmlich kein Integrationsdivisor kleiner als α^2 werden.

Als characteristisch für die Bewegung in dem Falle, wo $k = 1$, heben wir noch Folgendes hervor. Die mittlere Bewegung ergiebt sich aus der Formel:

$$n = \frac{s' n'}{s + \sigma};$$

den Unterschied zwischen dieser und der apparenten mittleren Bewegung erhält man aber aus:

$$s(n - n_0) = - \frac{s' n'}{s + \sigma} \frac{4\alpha}{(e^{\xi} + e^{-\xi})^2};$$

dieser Unterschied wird also unmerklich bei einigermassen grossen positiven oder negativen Werthen von ξ. Bei kleineren Werthen von ξ wird aber die apparente mittlere Bewegung erheblich von der wahren abweichen und also Werthe von λ veranlassen können, die merklich von Null verschieden sind.

Auf die nähere Ermittelung der Ausdrücke, welche Entwicklungen nach Functionen von Exponentialgrössen enthalten, muss hier verzichtet werden, einestheils weil eine solche die Grenzen dieser Abhandlung sehr bedeutend erweitern müsste, anderntheils aber weil die vollständige Dar-

stellung der betreffenden Formeln erst dann von Interesse wird, wenn sich ein entsprechender concreter Fall darbietet. Dass einer solchen Darstellung, die allerdings nicht besonders einfach werden würde, jedoch keine ernsten Schwierigkeiten im Wege stehen, geht aus den Untersuchungen am Ende des zweiten Abschnittes hervor. Auf diese Untersuchungen gestützt, bemerken wir noch Folgendes.

Hat die Grösse k' einen zwar sehr kleinen, aber doch reellen Werth, so werden die Glieder in der Function (X) bei der Integration durch Factoren der Form:

$$\operatorname{cotang} \frac{2\lambda_1}{\alpha} K$$

vergrössert. In diesen Fällen hat man aber, wie oben nachgewiesen wurde, genähert:

$$K = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\pi}{2},$$

so dass der betreffende Integrationsfactor den Werth:

$$\operatorname{cotang} \frac{\lambda_1}{\lambda} \pi$$

annimmt. Nachdem dieses Resultat erlangt worden ist, schliesst man unmittelbar, dass Glieder in V_1 zwar wesentlich vergrössert werden können, ohne jedoch noch folgern zu dürfen, dass diese Function aufhörte, eine kleine Grösse zu sein. Wir wissen im Gegentheil, dass so lange k' einen reellen, wenn auch noch so kleinen, Werth hat, so kann V_1 keinen grössern Werth erhalten, als denjenigen, welcher sich aus der Gleichung (10) ergiebt. Die in dieser Gleichung vorkommende Function Z_1 ist aber, wie man aus der ersten der Gleichungen (16) ersehen kann, im Allgemeinen eine kleine Grösse, wenigstens von der Ordnung $\frac{1}{s_1}\frac{2K}{\pi}$, d. h. bei kleinen Werthen von k', von der Ordnung $\frac{\alpha}{s_1 \lambda}$.

Nun ist aber, wie wir einer in der Einleitung gegebenen Formel entnehmen können, näherungsweise:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2s_2};$$

wir haben also:

$$\frac{\alpha}{s_1\lambda} = -\frac{2\alpha}{\frac{s_1}{s_1'} + s_1\sigma}$$

Der Nenner ist hier im Allgemeinen eine Grösse nullter Ordnung, welche nur in selten vorkommenden Ausnahmefällen so kleine Werthe annimmt, dass das Verhältniss $\frac{\alpha}{s_1\lambda}$ als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen wäre.

Es ist aber noch ein Umstand zu berücksichtigen. In dem Maasse, wie V_1 grösser wird, vermindert sich, wie wir aus der Gleichung (3) entnehmen können, der Werth von α, vorausgesetzt, dass V_1 nicht Werthe erhält, die hier nicht in Frage kommen können. In Folge dessen wird die Wahrscheinlichkeit vermindert, dass der Modul k der Einheit sehr nahe kommen kann, so dass das betreffende, von dem Argumente λnt abhängige Glied als ein gewöhnliches zu behandeln wäre. Aus dem Gesagten dürfen wir nun schliessen, dass Fälle, wo V_1 als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen ist, während k' einen sehr kleinen Werth hat, zwar nicht ganz ausgeschlossen sind, dieselben aber als sehr unwahrscheinlich betrachtet werden dürfen. Auf keinen Fall wird aber die Convergenz der Reihe (20) dadurch aufgehoben, dass die Function V_1 grössere Werthe erhält; die Convergenz dieser Reihe bleibt, wie aus den vorhergehenden Untersuchungen hervorging, bestehen, so lange keine der Grössen k_m den Grenzwerth 1 überschreitet.

Ähnliche Betrachtungen, diejenigen Fälle betreffend, wo l' sehr klein aber doch reell ist, würden zu der Erkenntniss führen, dass solche Fälle wohl stattfinden können, wiewohl sie als unwahrscheinlich anzusehen sind. Bei Werthen von l, welche der Einheit sehr nahe kommen, kann die Function V_1 leicht erhebliche Werthe erhalten, wodurch wiederum eine Verkleinerung von α herbeigeführt wird. In dem Maasse aber, wie für α kleinere Werthe anzunehmen sind, wird die Wahrscheinlichkeit geringer, dass aus der vierten Gleichung des Systems (IV) im zweiten Abschnitte ein positiver Werth, für l'^2 hervorgeht. Gegenwärtig haben wir keine Veranlassung, die Existenz eines solchen Falles zu vermuthen und dürfen daher die, in anderer Hinsicht wenig interessanten Detailuntersuchungen derselben vor der Hand bei Seite lassen.

IV.

Die im Vorhergehenden mitgetheilten Untersuchungen beziehen sich auf einen idealen Fall, welcher in den Bewegungstheorien von materiellen Punkten, die sich gegenseitig anziehen, nicht in andrer Weise realisirt sein kann, als indem wir die entsprechenden Formeln als eine erste Annäherung betrachten. Nichts desto weniger, und sogar ganz abgesehen von der Möglichkeit, die bereits erlangten Resultate als Formeln einer ersten Annäherung entsprechend verwerthen zu können, haben diese Resultate doch einen nicht geringen Werth für die Beantwortung der Frage, welcher die vorliegenden Untersuchungen gewidmet sind; sie ergeben nehmlich gewissermassen ein Schema, nach welchem die Untersuchungen über die Convergenz der in wirklich vorkommenden Fällen anzuwendenden Entwicklungen vorzunehmen sind.

Bereits in der Einleitung wurde des Umstandes gedacht, dass characteristische Glieder derselben Ordnung nicht vereinzelt vorkommen, sondern in der Regel in einer endlichen Anzahl vorhanden sind. Wir müssen nun unsere Untersuchungen dahin ausdehnen, dass auf diesen Umstand Rücksicht genommen wird, damit sie denjenigen Character der Allgemeingültigkeit erhalten, welche für die Erkenntniss der Natur der Bewegungen, also für die Lösung der Aufgabe im astronomischen Sinne, erforderlich ist, wobei die Entscheidung hinsichtlich der Convergenz gewisser bei derselben auftretenden Reihen offenbar nicht genügt.

Unsern Untersuchungen legen wir also nun die nachstehende Differentialgleichung zu Grunde, von welcher die Gleichung (2) des ersten Abschnittes als eine Specialisirung anzusehen ist,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2Z}{dt^2} = &- n^2A_{0,1}\sin[(sn - s'n' + \sigma_{0,1}n)t + sZ + sc - s'c' + B_{0,1}] \\ &- n^2A_{0,2}\sin[(sn - s'n' + \sigma_{0,2}n)t + sZ + sc - s'c' + B_{0,2}] \\ &- \ldots\ldots \\ &+ \frac{2}{s}n^2(X) \end{aligned}$$

wobei bezeichnet wurde:

$$(2)\qquad \frac{2}{s}(X) = -A_{1,1}\sin[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_{1,1} n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_{1,1}]$$
$$- A_{1,2}\sin[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_{1,2} n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_{1,2}]$$
$$- \ldots\ldots$$
$$- A_{2,1}\sin[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_{2,1} n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_{2,1}]$$
$$- A_{2,2}\sin[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_{2,2} n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_{2,2}]$$
$$- \ldots\ldots$$

Wenn wir hier feststellen, dass die Coefficienten $A_{0,1}$, $A_{0,2}$, ... unter einander Grössen derselben Ordnung sind, und ebenso die Coefficienten $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ... unter einander, u. s. w., so ist die Anzahl dieser Coefficienten innerhalb jeder Gruppe immer endlich, wiewohl diese Anzahl mit der Ordnung der Gruppe, also mit dem ersten Index der A-Coefficienten wächst. Nun kommen aber Glieder vor, deren Argumente mit den Argumenten der bereits gedachten Glieder zusammenfallen, deren Coefficienten aber einer höheren Ordnung als der betreffenden Gruppe angehört. Zählt man nun diese Glieder zu der Gruppe, so wird dieselbe zwar eine unendliche Anzahl Glieder enthalten, welche aber selbst in Gruppen zerfallen, die eine gleichförmig convergente Reihe bilden. Auf unsere ferneren Betrachtungen bleibt daher der Umstand ganz ohne Einfluss, ob die Anzahl der Glieder innerhalb der, in den Formeln (1) und (2) vorkommenden Gruppen eine endliche oder unendliche ist.

Indem wir unter σ und B zwei noch zu bestimmende Constanten, σ von derselben Grössenordnung wie $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{0,2}$, ... und B beliebig, verstehen, führen wir zwei Functionen ε und θ durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad \left|\begin{aligned}
\varepsilon\cos 2\theta = {} & sA_{0,1}\cos[(\sigma_{0,1}-\sigma)nt + B_{0,1} - B] \\
& + sA_{0,2}\cos[(\sigma_{0,2}-\sigma)nt + B_{0,2} - B] \\
& + \ldots\ldots \\
\varepsilon\sin 2\theta = {} & sA_{0,1}\sin[(\sigma_{0,1}-\sigma)nt + B_{0,1} - B] \\
& + sA_{0,2}\sin[(\sigma_{0,2}-\sigma)nt + B_{0,2} - B] \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

ein. Setzen wir überdies:

$$(4) \qquad 2W = (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ + sc - s'c' + B,$$

so erhalten wir aus (1) die Differentialgleichung:

$$(5) \qquad \frac{d^2W}{dt^2} = -n^2\varepsilon \sin(W + \theta)\cos(W + \theta) + n^2(X)$$

Untersuchen wir vor Allem das Verhalten der Functionen ε und θ. Zu diesem Zwecke differentiiren wir die Gleichungen (3) und setzen zur Abkürzung:

$$L_\nu = (\sigma_{0,\nu} - \sigma)nt + B_{0,\nu} - B$$

Es findet sich hierauf:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\varepsilon \sin 2\theta \frac{d\theta}{dt} = &- s(\sigma_{0,1} - \sigma)nA_{0,1} \sin L_1 \\ &- s(\sigma_{0,2} - \sigma)nA_{0,2} \sin L_2 \\ &- \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon \cos 2\theta \frac{d\theta}{dt} = &\quad s(\sigma_{0,1} - \sigma)nA_{0,1} \cos L_1 \\ &+ s(\sigma_{0,2} - \sigma)nA_{0,2} \cos L_2 \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (3) gegebenen Ausdrücke für $\varepsilon\cos 2\theta$ und $\varepsilon \sin 2\theta$ findet man nun durch eine leichte Rechnung:

$$\begin{aligned}\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} = &- s^2n(\sigma_{0,2} - \sigma_{0,1})A_{0,1}A_{0,2} \sin(L_2 - L_1) \\ &- s^2n(\sigma_{0,3} - \sigma_{0,2})A_{0,2}A_{0,3} \sin(L_3 - L_2) \\ &- s^2n(\sigma_{0,3} - \sigma_{0,1})A_{0,1}A_{0,3} \sin(L_3 - L_1) \\ &- \ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\varepsilon^2\frac{d\theta}{dt} = &\quad s^2n(\sigma_{0,1} - \sigma)A_{0,1}^2 + s^2n(\sigma_{0,2} - \sigma)A_{0,2}^2 + \ldots \\ &+ s^2n(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2} - 2\sigma)A_{0,1}A_{0,2} \cos(L_2 - L_1) \\ &+ s^2n(\sigma_{0,2} + \sigma_{0,3} - 2\sigma)A_{0,2}A_{0,3} \cos(L_3 - L_2) \\ &+ s^2n(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,3} - 2\sigma)A_{0,1}A_{0,3} \cos(L_3 - L_1) \\ &+ \ldots\ldots; \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (3) ergiebt sich die nachstehende direct, indem man die Summe der Quadrate dieser Gleichungen bildet,

$$\varepsilon^2 = s^2\{A_{0,1}^2 + A_{0,2}^2 + \dots\}$$
$$+ 2s^2 A_{0,1} A_{0,2} \cos(L_2 - L_1) + 2s^2 A_{0,2} A_{0,3} \cos(L_3 - L_2)$$
$$+ 2s^2 A_{0,1} A_{0,3} \cos(L_3 - L_1) + \dots$$

Durch Differentiation dieser Formel ergiebt sich der bereits angeführte Werth von $\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt}$ unmittelbar.

Durch die Definition der Function ε ist es an sich klar, dass dieselbe immer einen reellen Werth haben muss. Wenn wir also von dem sehr unwahrscheinlichen Falle absehen, in welchem ε den Werth Null erhalten kann, so dürfen wir ε^2 als eine stets positive Grösse ansehen. — Setzen wir nun:

$$h^2 = s^2\{A_{0,1}^2 + A_{0,2}^2 + \dots\}$$
$$H = 2s^2 A_{0,1} A_{0,2} \cos(L_2 - L_1) + \dots$$

und bezeichnen den grössten positiven Werth von H mit H_1 und den grössten negativen mit $-H_2$, so ist nothwendig:

$$h^2 > H_2$$

Wir bezeichnen ferner:

$$g_1 = \frac{H_1 + H_2}{2}; \qquad g_2 = \frac{H_1 - H_2}{2}$$

und schreiben:

$$\varepsilon^2 = h^2 + g_2 + H - g_2;$$

es ist hierbei klar, dass die Function $H - g_2$ zwischen den Grenzen $-g_1$ und $+g_1$ hin und her schwankt, sowie dass

$$h^2 + g_2 > g_1$$

Setzen wir also:

$$H - g_2 = g_1 U$$

$$\frac{g_1}{h^2 + g_2} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

so ist U eine Function, welche immer zwischen den Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen bleibt, und β eine Constante, deren Werth kleiner als die Einheit ist. Es ergiebt sich hiernach:

$$\varepsilon^2 = \frac{h^2 + g_2}{1 + \beta^2}\{1 + 2\beta U + \beta^2\},$$

aus welcher Gleichung die Function ε ebenso wie $\sqrt{\varepsilon}$ in gleichförmig convergenten Reihen entwickelt werden können, wobei die Glieder trigonometrische Functionen der Argumente L_1, L_2, ... enthalten. Mit Hülfe des gefundenen Ausdruckes lässt sich die Function $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ebenfalls in derselben Weise entwickeln, wonach eine ähnliche Entwicklung des Differentials $\frac{d\theta}{dt}$ hergestellt werden kann. Man bemerkt nun sehr leicht, dass die Coefficienten dieser Entwicklung lineare Functionen der Grössen σ, $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{0,2}$, ... sind, woraus folgt, dass das constante Glied, durch eine passende Bestimmung von σ, die noch zu unserer Verfügung steht, zum Verschwinden gebracht werden kann. Man erhält somit die Function θ durch eine Reihe dargestellt, in der nur trigonometrische Functionen der Zeit vorkommen. Wir nehmen hier an, dass die Reihe gleichförmig convergent ist; der Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme ergiebt sich bei der Entwicklung der elementären Glieder, die wir aber jetzt nicht mit in den Kreis unserer Untersuchungen hineinziehen.

Wir gehen nun zur Aufsuchung des Integrals der Gleichung (5) über; ich bemerke dabei, dass die Form, unter welcher ich hier das Integral darstellen werde, in gewissen Fällen, namentlich wenn ε sehr klein werden oder gar verschwinden kann, durch eine andere mit Vortheil zu ersetzen ist. Diese andere Form findet sich in einer Abhandlung von Herrn Harzer: *Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper* dargestellt, welche Abhandlung vor kurzem in den Mémoires de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg veröffentlicht worden ist.

Die betreffende Gleichung erhält sogleich eine etwas einfachere Form als die oben gegebene, wenn wir setzen:

$$W + \theta = V; \qquad n^2(X) + \frac{d^2\theta}{dt^2} = n^2X;$$

es wird nehmlich nun:

$$(6) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} + n^2\alpha^2 \sin V \cos V = n^2 X,$$

wenn wir α^2 statt ε schreiben.

Wenn nun α^2 eine Constante wäre und X den Werth Null hätte, so erhielte man das Integral der vorgelegten Gleichung durch elliptische Functionen, wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden ist. Wenngleich aber diese Voraussetzungen hier nicht zutreffen, so geben wir dem Integrale doch dieselbe Form, die es bei constantem α^2 und verschwindendem X erhalten würde, indem wir sowohl den Modul als veränderlich ansehen, als auch dem Argumente eine Function der Zeit hinzugefügt denken; diese Grössen müssen selbstverständlich in der Weise bestimmt werden, dass der obigen Gleichung genügt wird.

Dem Gesagten gemäss setzen wir:

$$(7) \qquad \left(\frac{dV}{ndt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin V^2,$$

wobei wir unter der Bezeichnung γ^2 eine Function der Zeit verstehen, welche einen constanten Werth annimmt wenn α^2 unveränderlich ist und X den Werth Null hat.

Zur Bestimmung der Function γ differentiiren wir die soeben aufgestellte Gleichung, wodurch wir finden:

$$\frac{d\gamma^2}{ndt} = 2\frac{dV}{ndt}\left\{\frac{d^2V}{n^2dt^2} + \alpha^2 \sin V \cos V\right\} + \sin V^2 \frac{d\alpha^2}{ndt},$$

eine Gleichung, aus welcher man mit Rücksicht auf (6) die nachstehende augenblicklich erlangt:

$$(8) \qquad \frac{d\gamma^2}{ndt} = 2X\frac{dV}{ndt} + \sin V^2 \frac{d\alpha^2}{ndt}$$

Dem zweiten Integrale der Gleichung (6) geben wir die Form:

$$(9) \qquad V = \operatorname{am} \xi \quad \left(\operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

wobei wir uns das Argument ξ als durch die Formel:

$$(10)\qquad \xi = \frac{2K}{\pi}\left[\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right]$$

gegeben denken.

In dieser Formel bezeichnet K das, mit dem veränderlichen Modul k berechnete vollständige Integral erster Gattung, welches jetzt ebenfalls als eine Function der Zeit anzusehen ist; Γ eine sogleich zu bestimmende Function und Γ_0 eine Integrationsconstante.

Für die Function $\frac{dV}{ndt}$ erhalten wir nun einerseits unter Berücksichtigung der Gleichung (9) aus der Gleichung (7) den Werth:

$$\frac{dV}{ndt} = \gamma \operatorname{dn}\xi;$$

anderseits ergiebt sich aber durch Differentiation der Gleichung (9) unter Berücksichtigung von (10):

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn}\xi\left\{\frac{2K}{\pi}\Gamma + \frac{d\left(\frac{2K}{\pi}\right)}{dk}\left(\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right)\frac{dk}{ndt}\right\} + \frac{d\operatorname{am}\xi}{dk}\frac{dk}{ndt}$$

Nun findet man aber, mit Hülfe einer von Herrn Hermite gegebenen Formel für die Differentiation der elliptischen Functionen hinsichtlich des Moduls:

$$\frac{d\operatorname{am}\xi}{dk} = -\operatorname{dn}\xi\frac{d\left(\frac{2K}{\pi}\right)}{dk}\left(\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right) - \frac{\operatorname{dn}\xi}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi},$$

womit das folgende Resultat erlangt wird:

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn}\xi\left\{\frac{2K}{\pi}\Gamma - \frac{1}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi}\frac{dk}{ndt}\right\}$$

Die Gleichsetzung der beiden Werthe von dV führt nun augenblicklich zu der Formel:

$$(11)\qquad \Gamma = \frac{\pi}{2K}\gamma + \frac{\frac{\pi}{2K}}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi}\frac{dk}{ndt}$$

Durch die Gleichungen (9), (10) und (11) ist V als eine Function

von γ dargestellt worden; das erlangte Resultat wäre nun in die Gleichung (8) einzusetzen, wodurch man eine Differentialgleichung erhielte, aus welcher die Unbekannte γ bestimmt werden könnte, da alle übrigen in den betreffenden Grössen als bekannt anzunehmen sind. Die Integration dieser Gleichung liesse sich jedoch nicht direct ausführen, sondern müsste man das Resultat auf dem Wege der Annäherungen suchen. — Wir wollen aber diese Differentialgleichung unseren Untersuchungen nicht zu Grunde legen, sondern zunächst eine andere ableiten, durch welche k gefunden wird; hierauf werden wir eine zweite Differentialgleichung aufsuchen, durch deren Integration man zwar nicht γ selbst, wohl aber einen Theil des Integrales

$$\int \gamma n dt$$

bestimmen kann.

Die Relation zwischen den drei Grössen k, α und γ giebt uns sofort:

$$dk^2 = \frac{\gamma^2 d\alpha^2 - \alpha^2 d\gamma^2}{\gamma^4}.$$

Hieraus ergiebt sich, indem der Werth von $d\gamma^2$ aus der Gleichung (8) eingeführt wird,

$$dk^2 = \frac{1}{\gamma^4}[(\gamma^2 + \alpha^2 \sin V^2)d\alpha^2 - 2\alpha^2 X dV],$$

oder:

$$(12) \qquad \frac{dk^2}{ndt} = \frac{k^2}{\alpha^2}\operatorname{dn}\xi^2 \frac{d\alpha^2}{ndt} - 2\frac{k^3}{\alpha} X \operatorname{dn}\xi,$$

oder endlich:

$$(13) \qquad \frac{dk}{ndt} = \frac{k}{\alpha}\operatorname{dn}\xi^2 \frac{d\alpha}{ndt} - \frac{k^2}{\alpha} X \operatorname{dn}\xi$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ein bemerkenswerthes Resultat ableiten, wenn man sich die Annahme gestattet, dass die dritte Potenz von k neben der ersten vernachlässigt werden darf. Um dieses Resultat zu erhalten schreiben wir wie früher $\frac{1}{l}$ für k. Es ergiebt sich alsdann:

$$(14) \qquad \frac{dl}{ndt} + \frac{l}{\alpha}\operatorname{dn}\xi^2 \frac{d\alpha}{ndt} = \frac{X}{\alpha}\operatorname{dn}\xi$$

wonach man die Formel:

$$(15)\qquad l = e^{-\int \frac{da}{a} \mathrm{dn}\xi^2} \left| \gamma_0 + \int \frac{X}{a} e^{\int \frac{da}{a} \mathrm{dn}\xi^2} \mathrm{dn}\xi\, ndt \right|$$

aufstellen kann, wobei γ_0 eine Integrationsconstante bedeutet.

In Übereinstimmung mit der soeben erwähnten Hypothese setzen wir nun $\mathrm{dn}\xi$ gleich der Einheit und folgern alsdann den Werth:

$$(16)\qquad k = \frac{1}{l} = \frac{a}{\gamma_0 + \int Xndt}$$

Dieser Ausdruck repräsentirt eine wirkliche Annäherung, so oft k immer kleiner als 1 bleibt; durch Substitution dieses Werthes in der Formel (15) ergiebt sich ein genaueres Resultat, und man findet die gesuchte Grösse mit jeder beliebigen Genauigkeit, indem man die Näherungen fortsetzt. Diesem Resultate entspricht auch der Werth:

$$(17)\qquad \gamma = \gamma_0 + \int Xndt$$

womit wir mit Hülfe der Gleichung (11) den nachstehenden erhalten, indem wir fortwährend Grössen von der Ordnung k^2 vernachlässigen,

$$\int Tndt = \gamma_0 nt + \int ndt \int Xndt$$

Nun ist aber, wenn wir uns der Bezeichnungen:

$$sn - s'n' + \sigma n = 2n\lambda; \qquad sc - s'c' + B = 2\Delta$$

bedienen,

$$2(V - \theta) = 2\lambda nt + sZ + 2\Delta;$$

und setzt man hier den Werth von V ein, so wie sich dieser durch Entwicklung der Gleichung (9) ergiebt, nehmlich:

$$V = \int Tndt + \Gamma_0 + \text{periodische Glieder},$$

so findet sich mit Rücksicht auf den soeben gefundenen Ausdruck für $\int Tndt$:

$$\begin{aligned} 2\gamma_0 nt + 2\Gamma_0 + 2\Psi_0 + 2\int ndt \int Xndt - 2\theta \\ = 2\lambda nt + sZ + 2\Delta \end{aligned}$$

Wir haben hier die im Ausdrucke von V vorkommende Summe von periodischen Gliedern durch Ψ_0 bezeichnet; wenn wir jetzt noch γ_0 mit λ, Γ_0 mit Δ identificiren, so wird unser Resultat:

$$Z = \frac{2}{s}\left\{\Psi_0 - \theta + \int ndt \int Xndt\right\} \tag{18}$$

Diese Ergebnisse sind selbstverständlich nur genäherte, und namentlich wäre die Relation zwischen γ_0 und λ noch sehr ungenügend, wenn es sich um die Ausführung einer numerischen Rechnung handelte. Die strengeren Ausdrücke haben für die jetzigen Untersuchungen kein besonderes Interesse; ich kann sie also hier bei Seite lassen, und dies um so mehr, als man sie aus der Gleichung (15) in ähnlicher Weise ableiten kann, wie die Gleichungen (17) und (18) erhalten wurden.

Erinnern wir uns der Beziehung:

$$n^2(X) + \frac{d^2\theta}{dt^2} = n^2 X,$$

so finden wir aus der Gleichung (18) diese:

$$Z = \frac{2}{s}\left\{\Psi_0 + \int ndt \int (X) ndt\right\} \tag{19}$$

Aus der Gleichung (2) nehmen wir nun die nächste Glieder-Gruppe, die wir uns als in einem einzigen Gliede zusammengezogen denken, besonders heraus, und schreiben:

$$\frac{2}{s}(X) = -\frac{2}{s_1}\varepsilon_1 \sin(W_1 + \theta_1)\cos(W_1 + \theta_1) + \frac{2}{s_1}(X_1),$$

wobei ε_1, θ_1 und W_1 genau in derselben Weise aus den Gliedern der jetzt in Frage stehenden Gruppe gebildet werden, wie die entsprechenden Grössen ohne Index aus den Gliedern der ersten Gruppe; wir haben namentlich:

$$2W_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1$$

Die Function $\frac{2}{s_1}(X_1)$ umfasst die Summe aller übrigen Glieder, welche nicht der zusammengezogenen Gruppe angehören.

Wir zerlegen nun Z in zwei Theile, Z_0 und Z', und denken uns

dabei den Theil Z_0 als bekannt, d. h. aus den bekannten Gliedern in dem Ausdrucke (19) zusammengesetzt. Hierauf entwickeln wir $\sin Z_0$ nach den Vielfachen der Argumente, welche in Z_0 vorkommen, bezeichnen das constante Glied dieser Entwicklung mit P_0 und setzen endlich:

$$\varepsilon_1 = \alpha_1^2$$

$$2V_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z' + 2\Delta_1 + 2\theta_1$$

$$n^2 X_1 = n^2(X_1) + \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$$

Durch zweimalige Differentiation der Gleichung (19) ergiebt sich jetzt:

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} + n^2\alpha_1^2 \sin V_1 \cos V_1 = n^2 X_1, \tag{20}$$

welche Gleichung genau wie (6) zu behandeln ist.

Bei der Herstellung der Gleichung (20) haben wir gewisse Glieder, die nicht unmittelbar bekannt sind, allerdings vernachlässigt, nehmlich die, welche von den Argumenten $2(\lambda + \lambda_1)nt$, $2(\lambda - \lambda_1)nt$, u. s. w. abhängen. Diese Glieder können aber, sobald Z' mit Hülfe der Gleichung (20) einmal bestimmt worden ist, leicht berechnet werden und sind immer als sehr kleine Grössen anzusehen; wir können sie daher nach und nach der Function Ψ_0 hinzufügen. Nachdem dies festgestellt worden ist, haben wir:

$$Z_0 = \frac{2}{s}\Psi_0$$

und erhalten, nach Integration der Gleichung (20), ein ähnliches Resultat hinsichtlich des Hauptheiles von Z', den wir durch Z_1 bezeichnen wollen, vorausgesetzt, dass der Modul k_1 immer kleiner als 1 bleibt. In ähnlicher Weise ist nun fortzusetzen, und man findet, wenn die Moduln sich immer kleiner als 1 ergeben, ein Resultat der Form:

$$Z = \frac{2}{s}\Psi_0 + \frac{2}{s_1}\Psi_1 + \frac{2}{s_2}\Psi_2 + \dots, \tag{21}$$

also eine gleichförmig convergente Reihe, da die Functionen Ψ_0, Ψ_1, ... im Allgemeinen kleine Grössen sind, aber nicht über eine gewisse Grenze, die als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen ist, anwachsen können.

Ergiebt sich aber einer der Moduln als eine Function, deren Werthe immer über 1 liegen, so bricht die Reihe (21) bei diesem Gliede ab, und die entsprechende Gleichung der Form (6) oder (20) muss, damit das Integral derselben sogleich unter der anschaulichsten Form erhalten werde, in einer, von der vorher befolgten, etwas abweichenden Weise behandelt werden.

Wir nehmen hier wieder an, dass sich das erste Integral der Gleichung (6) — oder auch der Gleichung (20), denn die Rechnung bleibt immer dieselbe — durch die Form:

$$\left(\frac{dV}{ndt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin V^2$$

darstellen lässt. Hinsichtlich des zweiten Integrales setzen wir aber voraus, dass dasselbe mit Hülfe der Gleichungen:

$$(22) \qquad \left|\begin{array}{l} \sin V = l \operatorname{sn} \eta \\ \cos V = \operatorname{dn} \eta \end{array}\right| \quad \left(\operatorname{mod} l = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

zu finden ist, indem wir bezeichnen:

$$(23) \qquad \eta = \frac{2L}{\pi}\left[\int A n dt + A_0\right]$$

und denken uns dabei A als eine noch zu bestimmende Function von t, und A_0 als eine Integrationsconstante.

Aus den obigen Relationen findet sich sogleich:

$$(24) \qquad \frac{dV}{ndt} = \gamma \operatorname{cn} \eta;$$

man erhält aber einen zweiten Ausdruck für dieses Differential, indem man eine der Gleichungen (22) differentiirt, und nachher $\cos V$ oder $\sin V$ mit Hülfe der anderen eliminirt. Man findet somit:

$$\frac{dV}{ndt} = \frac{l \operatorname{cn} \eta}{\operatorname{dn} \eta} \frac{d \operatorname{am} \eta}{ndt} + \frac{\operatorname{sn} \eta}{\operatorname{dn} \eta} \frac{dl}{ndt}$$

und hieraus ergiebt sich in Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{d \operatorname{am} \eta}{ndt} = \operatorname{dn} \eta \left\{\frac{2L}{\pi} A - \frac{1}{ll'^2} \frac{d \log \theta_3(\eta)}{d\eta} \frac{dl}{ndt}\right\}$$

der Ausdruck:

$$\frac{dV}{ndt} = l\,\mathrm{cn}\,\eta\left\{\frac{2L}{\pi}A - \frac{1}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_3(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt}\right\} + \frac{\mathrm{sn}\,\eta}{\mathrm{dn}\,\eta}\frac{dl}{ndt}$$

Mit Hülfe der bekannten Relation:

$$\frac{d\log\Theta_3(\eta)}{d\eta} = \frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta} + \frac{l'^2\,\mathrm{sn}\,\eta}{\mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\eta}$$

lässt sich die vorstehende Gleichung indessen wesentlich vereinfachen; es wird:

$$\frac{dV}{ndt} = l\,\mathrm{cn}\,\eta\left\{\frac{2L}{\pi}A - \frac{1}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt}\right\}$$

Dieser Werth von $\frac{dV}{ndt}$ muss nun dem früheren, durch die Gleichung (24) gleich sein, aus welcher Bedingung die nachstehende Relation sogleich gefolgert wird:

$$A = \frac{\pi}{2L}\alpha + \frac{\frac{\pi}{2L}}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt} \tag{25}$$

Im Gegensatz zu dem, durch die Gleichung (11) gegebenen Werthe von V, welcher offenbar für jeden Werth von ξ endlich bleibt, ist ein ähnliches Verhalten in dem soeben gefundenen Ausdrucke nicht unmittelbar wahrzunehmen. Die betreffende Eigenschaft von A, für jeden Werth von η endlich zu bleiben, leuchtet aber unmittelbar ein, nachdem man den Werth von $\frac{dl}{ndt}$ substituirt hat.

Weil:

$$\mathrm{dn}\,\xi = \mathrm{cn}\,\eta,$$

kann die Gleichung (14) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dl}{ndt} = \frac{X}{a}\,\mathrm{cn}\,\eta - \frac{l}{a}\frac{da}{ndt}\,\mathrm{cn}\,\eta^2$$

Dieser Werth soll also in die Formel (25) eingeführt werden; ersetzen

wir dabei die Function θ_2 durch θ_3, indem wir von der bereits angeführten Relation Gebrauch machen, so erlangen wir:

$$(26)\qquad A = \frac{\pi}{2L}\alpha - \frac{\pi}{2L}\left\{\frac{X}{al}\frac{\operatorname{sn}\eta}{\operatorname{dn}\eta} - \frac{1}{a}\frac{da}{ndt}\frac{\operatorname{sn}\eta\operatorname{cn}\eta}{\operatorname{dn}\eta}\right\} + \frac{1}{l'^2}\frac{\pi}{2L}\left\{\frac{X}{al}\operatorname{cn}\eta - \frac{1}{a}\frac{da}{ndt}\operatorname{cn}\eta^2\right\}\frac{d\log\theta_3(\eta)}{d\eta}$$

Dieser Formel fügen wir die Gleichung (15) hinzu, nachdem wir in derselben das Argument ξ gegen η vertauscht haben; es wird alsdann:

$$(27)\qquad l = e^{-\int\frac{da}{a}\operatorname{cn}\eta^2}\left\{\gamma_0 + \int\frac{X}{a}e^{\int\frac{da}{a}\operatorname{cn}\eta^2}\operatorname{cn}\eta\, ndt\right\}$$

Dass die Entwicklung dieses Ausdruckes für l im Allgemeinen convergent sein kann, erkennt man leicht. Wenn aber die Glieder in X, die wir uns zunächst als völlig bekannt denken, so beschaffen wären, dass die Entwicklung des Integrales:

$$(\alpha)\qquad \int\frac{X}{a}ndt$$

nicht convergirte, so müsste die Entwicklung des Integrales:

$$(\beta)\qquad \int\frac{X}{a}\operatorname{cn}\eta\, ndt$$

im Gegentheil convergent sein; dies jedoch nur unter der Voraussetzung dass $\frac{X}{a}$ nicht gewissermassen aus zwei Reihen zusammengesetzt wäre, von denen die eine im Integrale (α) und die zweite im Integrale (β) das Aufhören der Convergenz veranlasste. Bei der ersten Annäherung sind Reihen der zweiten Art höchst unwahrscheinlich, und wir brauchen einen derartigen Fall gar nicht in Betracht zu ziehen, weil alsdann der Modul l nicht so klein sein könnte wie hier vorausgesetzt wird; man würde also auf die vorher aufgestellten Ausdrücke zurückkommen, wo k kleiner als 1 vorausgesetzt wurde. — Bei der zweiten Annäherung kommen aber Reihen zum Vorschein, von denen man zunächst vermuthen könnte, dass sie, in das Integral (β) eingesetzt, das Aufhören der Convergenz veran-

lassen würden. Dass aber auch dies nicht der Fall ist, lässt sich durch folgende Betrachtungen nachweisen.

Aus der ersten der Gleichungen (22) findet man:

$$V = \arcsin(l \operatorname{sn} \eta)$$

und weil l kleiner als 1 angenommen wird, so convergirt die Reihe:

$$V = l \operatorname{sn} \eta + \frac{1}{2} \frac{l^3 \operatorname{sn} \eta^3}{3} + \ldots$$

gleichförmig und die betreffende Function ist eine rein periodische Function von η. Berücksichtigt man diesen Werth von V bei der Gleichung:

$$2V = 2\lambda nt + sZ + 2\Delta + 2\theta,$$

so schliesst man sogleich, dass λ gleich Null, sowie dass die Constante in θ gleich Δ sein muss. Die Sinusse der Argumente:

$$2\lambda_\nu nt + s_\nu Z + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu$$

zerlegen wir nun in die Theile:

$$G_\nu \sin(2\lambda_\nu nt + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu) + H_\nu \cos(2\lambda_\nu nt + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu),$$

und erkennen leicht, dass die Functionen G_ν und H_ν in Potenzenreihen der Formen:

$$G_\nu = G_{\nu,0} + G_{\nu,1} \operatorname{sn} \eta^2 + G_{\nu,2} \operatorname{sn} \eta^4 + \ldots$$
$$H_\nu = H_{\nu,0} \operatorname{sn} \eta + H_{\nu,1} \operatorname{sn} \eta^3 + \ldots$$

zerfallen, welche Reihen für alle reellen Werthe der Veränderlichen η gleichförmig convergent sind. Bilden wir nun die Glieder der Function (X) und setzen sie in das Integral (β) ein, so erhalten wir Ausdrücke der Form:

$$\int Y_0 \operatorname{cn} \eta\, ndt, \qquad \int Y_1 \operatorname{sn} \eta \operatorname{cn} \eta\, ndt, \qquad \int Y_2 \operatorname{sn} \eta^2 \operatorname{cn} \eta\, ndt, \ \ldots$$

Man bemerkt nun leicht, dass die Entwicklungen dieser Ausdrücke nicht nur convergiren, wenn die Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in der Weise abnehmen, dass die Entwicklungen von:

$$\int Y_0 ndt, \qquad \int Y_1 ndt, \qquad \int Y_2 ndt, \ \ldots$$

diese Eigenschaft nicht hätten, sondern auch dass die betreffenden Ausdrücke immer relativ kleine Werthe haben müssen.

Die vorhergehenden Betrachtungen entscheiden aber nicht über das im Ausdrucke von η [Gleichung (23) und (26)] vorkommende Integral:

$$\int \frac{X}{al.} \operatorname{sn} \eta n dt$$

Allerdings wird man in der ersten Annäherung — ganz unwahrscheinliche Ausnahmefälle ausgenommen — ein convergentes Resultat erwarten müssen, allein in der zweiten Annäherung würde man ein Glied der Form:

$$\int Y_1 \operatorname{sn} \eta^2 n dt$$

finden, und über die Convergenz der Entwicklung derselben besagen die Untersuchungen über das entsprechende Integral im Ausdrucke für l Nichts. Immerhin ist es sehr unwahrscheinlich, dass die betreffende Entwicklung wirklich divergent ist, und namentlich viel unwahrscheinlicher, als dass man bei dem Doppelintegrale:

$$\int n dt \int Y_1 n dt$$

eine divergente Entwicklung findet, sondern hat man in der Regel bloss sehr grosse Glieder von sehr langer Periode zu erwarten. Nichts desto weniger erscheint der Fall nicht gänzlich ausgeschlossen zu sein, dass die Form des Integrals der Gleichung (6), die wir in den Gleichungen (22) voraussetzen, nicht genügt. Ein solcher Fall kann aber auch aus einer anderen Ursache, die an sich viel wahrscheinlicher ist, als die Nichtconvergenz der oben bezeichneten Reihe, eintreten, nehmlich durch das Verschwinden der Function l. Wir werden sogleich eine, diesem Falle entsprechende Form des betreffenden Integrales aufsuchen, zuvor aber noch einige Bemerkungen in Betreff der Formel (27) den vorhergehenden hinzufügen.

Das Vorhandensein der Factoren $e^{-\int \frac{da}{a} \operatorname{cn} \eta^2}$ und $e^{\int \frac{da}{a} \operatorname{cn} \eta^2}$ übt keinen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten der Function l aus, jedenfalls können sie die Convergenz der Entwicklung nicht beeinträchtigen. Ein

anderer Umstand ist von grösserer Bedeutung. Die Function X enthält nehmlich das Glied:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

und zwar ist dieses eine Grösse zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte, aber nur ausnahmsweise, durch das Vorhandensein anderer Factoren, einer höheren Grössenordnung beizuzählen. Ganz in derselben Weise verhalten sich die, den späteren Gliedern in (X) angehörigen Functionen θ_1, θ_2, ...; ihre zweiten Differentiale sind wohl Grössen zweiter Ordnung, aber nur in kaum denkbaren Ausnahmefällen noch wesentlich kleiner. Durch die in der Gleichung (27) vorausgesetzte Integration werden nun diese Differentiale durch Grössen von der Ordnung α_ν^2 dividirt. Diese Divisoren sind zwar erster Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte, gehören aber einer desto höheren Ordnung der Excentricitäten an, je grösser die ganze Zahl ν ist und können also eine wesentliche Vergrösserung des Integrationsresultats veranlassen. Dass die Function l beständig kleiner als 1 bleibt ist also desto unwahrscheinlicher, je grösser die Zahl ν ist.

In der Theorie der von Jupiter bewirkten Störungen des kleinen Planeten Pallas findet sich ein kritisches Glied, oder richtiger eine Gruppe von kritischen Gliedern welche von den Zahlen $s_3 = 7$; $s_3' = 18$ abhängt. In Folge dieses Umstandes hat Gauss die Vermuthung ausgesprochen, dass die mittleren Bewegungen beider Planeten genau im Verhältnisse von $\frac{7}{18}$ zu einander stehen. Abgesehen nun auch ganz davon, dass hier auf die Coexistenz mehrerer Glieder oder auf die vollständige Form der Argumente nicht Rücksicht genommen worden ist, erscheint uns diese Vermuthung nach den vorhergehenden Untersuchungen als sehr wenig begründet. Hier ist nehmlich α_3^2 eine Grösse 11ter Ordnung hinsichtlich der Excentricitäten, so dass die Function l jedenfalls nicht immer als eine kleine Grösse anzusehen ist. Anderseits bleibt aber doch die Möglichkeit offen, dass Libration stattfindet. Die Darstellung des Integrals der Gleichung (6) durch die Gleichungen (22) wird nehmlich, wie wir schon hervorgehoben haben, in gewissen Fällen unmöglich, und solche Fälle treten namentlich dann ein, wenn die Schwankungen von l erheblich sind und diese Function dabei sehr klein werden kann. In solchen Fällen kann

man die im vorhergehenden Abschnitte auseinandergesetzte Methode in Anwendung bringen, indem man sämmtliche coordinirte Glieder einer Gruppe, mit Ausnahme desjenigen, bei dem $s_r n - s'_r n' + \sigma_{r,\nu} n$ verschwindet, der Function (X) hinzufügt. Man erhält alsdann in der Gleichung (25) des vorigen Abschnittes eine Anzahl Glieder, bei denen die β derselben Ordnung wie α^2 sind. Es ist aber doch möglich, dass die Reihe:

$$V_1 = \frac{2L}{\pi}\left\{\frac{\beta_1}{\left(2\lambda_1 \frac{2L}{\pi}\right)^2 - \alpha^2} \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\eta + H_1\right) + \dots\right\}$$

convergirt, und dies ist immer der Fall, wenn die Coefficienten λ sämmtlich wesentlich grösser als $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ sind. Dieser Bedingung kann aber nur genügt werden, wenn α^2 sehr klein ist, jedenfalls kleiner als eine Grösse zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte. Bei den Jupiterstörungen des Pallas würde dies nun zwar zutreffen, so dass wir die angeführte Entwicklung von V_1 als convergent denken können. Wir müssen hierbei jedoch berücksichtigen, dass es genügt, wenn ein einziger der Coefficienten λ von derselben Ordnung wie α ist, damit die Function V_1 als eine Grösse nullter Ordnung erscheine, und in diesem Falle wird auch l als eine Grösse nullter Ordnung zu betrachten sein. Aber auch wenn die Glieder in V_1, an die wir jetzt gedacht haben, sich als sehr klein erwiesen, müsste man doch, bis eine genaue Berechnung das Gegentheil ergiebt, die Existenz der Libration als höchst unwahrscheinlich ansehen. Damit ein Librationsglied überhaupt vorkommen kann, muss nehmlich, wie wir aus der vierten Gleichung des Systems II im zweiten Abschnitte erkennen, das Verhältniss:

$$\frac{sn_0 - s'n' + \sigma n}{2\alpha n_0}$$

eine kleine Grösse sein, und wenn dieser Bedingung genügt wäre, müsste überdies die Grösse $\sin D^2$ einen kleinen Werth haben. Wir können nun zwar annehmen, dass die Grösse:

$$s_r n - s'_r n' + \sigma_r n$$

einen verschwindend kleinen Werth habe; weil aber die Differenz $n - n_0$ nicht nur von den Störungsgliedern der r^{ten} Gruppe, sondern auch von

denen der vorhergehenden Gruppen beeinflusst ist, so müssen wir es als unwahrscheinlich bezeichnen, dass diese Differenz und also auch die Grösse $s_r n_0 - s'_r n' + \sigma_r n$ einen im Verhältnisse zu α_r kleinen Werth habe. Auf Grund dieser Betrachtungen dürfen wir es als eine allgemein gültige Regel ansehen, dass characteristische Glieder niedrigster Ordnungen über die Natur der Bewegung hinsichtlich des Vorkommens von Librationsgliedern entscheiden; wenn also bei diesen Gliedern eine solche Ungleichheit nicht existirt, so werden die folgenden characteristischen Glieder, wenn sie auch, für sich betrachtet, kritisch werden könnten, nach dem Schema, welches durch die Gleichung (21) angedeutet ist, zu berechnen sein. — Die Ansicht, dass Libration nur bei den ersten Gliedern in der Entwicklung der Störungsfunction anzutreffen ist, hat übrigens schon Hansen ausgesprochen, ohne dieselbe jedoch, so viel ich weiss, irgendwie begründet zu haben.[1]

Die oben in Aussicht gestellte, zweite Form des Integrales der Gleichung (6), welche für den Fall, dass l eine kleine Grösse, anwendbar ist, findet sich, nachdem man die Grösse $\sin V \cos V$ nach den Potenzen

[1] Hansen, *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten,* I, p. 187. Möglicherweise sieht er die Begründung in einer ähnlichen Bemerkung, wie derjenigen, welche man hierauf bezüglich in dem Werke des Herrn A. Gautier, *Essai historique sur le problème des trois corps,* findet. Es handelt sich hier um die Integration einer Gleichung der Form:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\beta u + \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

Durch Näherungen findet sich:

$$u = k \sin(t\sqrt{\beta} + h) + \frac{1}{\beta}\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{d^4\psi}{dt^4} + \ldots$$

wobei k und h die Integrationsconstanten bezeichnen. Die angeführte Reihe convergirt offenbar, wenn die Perioden der Glieder in ψ sehr lang im Vergleich zu der des ersten Gliedes sind. Hierbei darf aber β nicht beliebig klein sein, wenn die Glieder in ψ gegeben sind, und weil die Libration das erste Glied der obigen Reihe ist, so folgert man, dass sie nur bei nicht zu kleinem Werthe von β stattfinden kann.

Die erwähnte Schlussfolgerung ist indessen sehr mangelhaft, weil sie weder auf die Glieder kurzer Periode, noch auf die Glieder, welche mit u^3, u^5, u. s. w. multiplicirt sind, Rücksicht nimmt. Eine eingehendere Untersuchung dieser Art wird oben im Texte gegeben.

von V entwickelt hat. Nach dieser Entwicklung ergiebt sich aus der Gleichung (6) die nachstehende:

$$\text{(28)} \qquad \frac{d^2V}{n^2dt^2} + \alpha^2\left(V - \frac{4V^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\right) = X$$

An Stelle von t führen wir eine neue Veränderliche u ein, indem wir die Relation:

$$\text{(29)} \qquad du = \alpha n dt$$

feststellen; die obige Gleichung geht nun in folgende über:

$$\text{(30)} \qquad \frac{d^2V}{du^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\frac{dV}{du} + V - \frac{4V^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots = \frac{1}{\alpha^2}X$$

Aus dieser Gleichung können wir leicht eine andere ableiten, bei welcher das vom ersten Differentiale der gesuchten Grösse abhängige Glied nicht vorhanden ist. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\text{(31)} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\vartheta$$

und erhalten:

$$\text{(32)} \qquad \frac{d^2\vartheta}{du^2} + \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{du^2}\right]\vartheta - \frac{2}{3}\frac{1}{\alpha}\vartheta^3 + \ldots = \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}X$$

Diese Gleichung lässt sich leicht mittelst Annäherungen integriren; um hierbei jedoch keine Glieder zu erhalten, welche die unabhängige Veränderliche u ausserhalb des Sinus- oder Cosinuszeichens erhalten, addiren wir, rechts und links, zu der obigen Gleichung die Grösse $-\beta\vartheta$, wobei wir mit β einen constanten, vorläufig noch unbestimmten Coefficienten bezeichnen. In erster Annäherung integriren wir die Gleichung:

$$\frac{d^2\vartheta}{du^2} + (1 - \beta)\vartheta = \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}X.$$

wobei wir in den Argumenten der Glieder, welche in X vorkommen, ϑ

gleich Null setzen. Das Integral dieser Gleichung wird alsdann, indem p und P zwei Integrationsconstanten bezeichnen,

$$\vartheta = p \sin(\sqrt{1-\beta}\,u + P) \tag{33}$$

$$-\frac{\cos\sqrt{1-\beta}\,u}{\sqrt{1-\beta}}\int\frac{X}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\sin\sqrt{1-\beta}\,u\,du + \frac{\sin\sqrt{1-\beta}\,u}{\sqrt{1-\beta}}\int\frac{X}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\cos\sqrt{1-\beta}\,u\,du$$

Diesen Werth setzen wir hierauf in die bis jetzt unberücksichtigten Glieder der Gleichung (32) ein und bestimmen dabei die Constante β in der Weise, dass die Summe der von $\sin(\sqrt{1-\beta}\,u + P)$ abhängigen Glieder verschwindet. Die Gleichung, welche somit entsteht, kann wieder integrirt werden, wodurch man ein genaueres Resultat erhält. Mit diesem lässt sich eine genauere Bestimmung des Coefficienten β, sowie eine dritte Annäherung des gesuchten Resultates durchführen. In dieser Weise wird man eine Entwicklung von ϑ erhalten, die immer convergent ist, wenn die Constante p, ebensowie die Coefficienten der Glieder in X und $d\alpha$ kleine Grössen im Verhältnisse zum numerischen Betrag der Function α^2 sind.

Die Anwendung der soeben in ihren Grundlinien dargelegten Methode ist meistens derjenigen vorzuziehen, welche auf die Annahme gegründet ist, dass die Form des Integrals durch die Gleichungen (22), (23) und (24) gegeben ist. In rein theoretischer Hinsicht ist aber letztere Methode von grösserem Interesse, weil die durch sie bedingte Form mit derjenigen unmittelbar verglichen werden kann, welche für die Fälle gilt, wo der Modul k kleiner als die Einheit ist. Der Übergang von den Ausdrücken, welche von dem einen Modul abhängen, auf die, welche Functionen des reciproken Moduls sind, ist jedoch nicht überall leicht auszuführen. Nachdem aber die betreffenden Formelsysteme von den complementären Moduln abhängig gemacht worden sind, ist der Nachweis ihrer Identität sehr einfach.

Um die Reduction auf die complementären Moduln durchzuführen schlagen wir den folgenden Weg ein.

Zwischen dem jetzt anzuwendenden Argumente ξ' und der Zeit stellen wir die nachstehende Relation fest:

$$\xi' = \frac{2K'}{\pi}\left[\int V' n\,dt + \Gamma'_0\right] \tag{34}$$

und nehmen zugleich an, dass das Integral der Gleichung (7) durch die Form:

$$V = \operatorname{am} \xi' \left(\operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}\right) \tag{35}$$

dargestellt werde.

Die bekannte Hermite'sche Formel für das Differential von $\operatorname{am} \xi'$ in Bezug auf k' lässt sich leicht so umstellen, dass die in derselben vorkommenden elliptischen Functionen von dem Modul k' abhängen. Hierzu ist nur nöthig, die Werthe:

$$\frac{d \log \Theta_3(\xi')}{d\xi} = -\frac{\pi}{2KK'}\xi' + \frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi}$$

$$\frac{K-E}{K} - k^2 = -\left(\frac{K'-E'}{K'} - k'^2\right) - \frac{\pi}{2KK'}$$

in die betreffende Formel einzusetzen. Es entsteht somit der Ausdruck:

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = -\frac{\operatorname{dn} \xi'}{kk'^2}\left[\left(\frac{K'-E'}{K'} - k'^2\right)\xi' + \frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi}\right]$$

Weil aber:

$$\frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'} = -\frac{\frac{K'-E'}{K'} - k'^2}{k^2 k'}\frac{2K'}{\pi},$$

so lässt sich das gefundene Resultat auch folgendermassen schreiben, wobei wir den, durch die Gleichung (34) gegebenen Werth von ξ' einsetzen,

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = \frac{k}{k'} \operatorname{dn} \xi' \left[\frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'}\left(\int \Gamma' ndt + \Gamma'_0\right) - \frac{1}{k'k^2}\frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi'}\right]$$

Mit Rücksicht hierauf, sowie auf die Relation:

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = -\frac{k}{k'}\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk'},$$

ergiebt sich aus der, durch Differentiation von (35) unmittelbar hervorgehenden Gleichung:

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn} \xi' \left[\frac{2K'}{\pi}\Gamma' + \frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'}\left(\int \Gamma' ndt + \Gamma'_0\right)\frac{dk'}{ndt}\right] + \frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk'}\frac{dk'}{ndt}$$

die nachstehende:

$$\frac{dV}{ndt} = \text{dn}\,\xi' \left\{ \frac{2K'}{\pi} I'' + \frac{1}{k'k^2} \frac{d\log\Theta_3(i\xi')}{d\xi'} \frac{dk'}{ndt} \right\}$$

An Seite dieser Gleichung stellen wir die Relation:

$$\frac{dV}{ndt} = \gamma\,\text{dn}\,\xi',$$

wodurch die Bedeutung der Function γ festgestellt wird, und erhalten, durch Gleichsetzung beider Werthe von $\frac{dV}{ndt}$ die Formel:

$$(36) \qquad I'' = \frac{\pi}{2K'}\gamma - \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k'k^2} \frac{d\log\Theta_3(i\xi')}{d\xi'} \frac{dk'}{ndt}$$

Das Resultat, welches aus diesem Ausdrucke gewonnen wird, wenn man q' gegen $-q'$ vertauscht, werden wir durch A' bezeichnen; wenn wir dabei die Relation

$$\xi' = l\eta'$$

bestehen lassen, ist zunächst:

$$\frac{d\log\Theta_3(i\xi')}{d\xi'} = \frac{d\log\Theta(i\eta')}{ld\eta'};$$

und da überdies die Relationen:

$$K' = lL'; \qquad \frac{dk'}{k'} = \frac{dl}{l'l^2}; \qquad \frac{1}{l}\gamma = \alpha$$

stattfinden, so ergiebt sich:

$$(37) \qquad A' = \frac{\pi}{2L'}\alpha - \frac{\frac{\pi}{2L'}}{l'l^2} \frac{d\log\Theta(i\eta')}{d\eta'} \frac{dl'}{ndt}$$

Diese Formel wollen wir nun aber auch direct begründen.

Es sei nun angenommen, dass das Integral der Gleichung (6) durch die Relationen (22) und (24) gegeben ist; statt des Ausdruckes (23) nehmen wir aber den folgenden an:

$$(38) \qquad \eta' = \frac{2L'}{\pi} \left[\int A'ndt + A'_0 \right]$$

so, dass wir jetzt haben:

$$(39)\qquad \left|\begin{array}{l}\sin V = l\,\mathrm{sn}\,\eta' \\ \cos V = \mathrm{dn}\,\eta'\end{array}\right. \quad (\mathrm{mod} = l)$$

$$(40)\qquad \frac{dV}{ndt} = \gamma\,\mathrm{cn}\,\eta$$

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die Function A' in dem Argumente η' durch die Formel (37) gegeben ist.

Durch Differentiation einer der Gleichungen (39) findet man:

$$\frac{dV}{ndt} = \frac{l\,\mathrm{cn}\,\eta'}{\mathrm{dn}\,\eta'}\,\frac{d\,\mathrm{am}\,\eta'}{ndt} + \frac{\mathrm{sn}\,\eta'}{\mathrm{dn}\,\eta'}\,\frac{dl}{ndt}$$

$$= \frac{l\,\mathrm{cn}\,\eta'}{\mathrm{dn}\,\eta'}\,\frac{d\,\mathrm{am}\,\eta'}{ndt} - \frac{l'}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,\eta}{\mathrm{dn}\,\eta}\,\frac{dl'}{ndt},$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf den Werth:

$$\frac{d\,\mathrm{am}\,\eta'}{ndt} = \mathrm{dn}\,\eta'\left\{\frac{2L'}{\pi}A' + \frac{1}{l'l^2}\,\frac{d\log\Theta_3(i\eta')}{d\eta'}\,\frac{dl'}{ndt}\right\}$$

und auf die Gleichung (40) die nachstehende Form annimmt:

$$\gamma\,\mathrm{cn}\,\eta' = l\,\mathrm{sn}\,\eta'\left\{\frac{2L'}{\pi}A' + \frac{1}{l'l^2}\,\frac{d\log\Theta_3(i\eta')}{d\eta'}\,\frac{dl'}{ndt}\right\} - \frac{l'}{l}\,\frac{\mathrm{sn}\,\eta'}{\mathrm{dn}\,\eta'}\,\frac{dl'}{ndt}$$

Vermöge der Beziehungen:

$$\frac{d\log\Theta_3(i\eta')}{d\eta'} = \frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta'} - il'^2\,\frac{\mathrm{sn}\,i\eta'\,\mathrm{cn}\,i\eta'}{\mathrm{dn}\,i\eta'}$$

$$\frac{\mathrm{sn}\,\eta'}{\mathrm{dn}\,\eta'} = -i\,\frac{\mathrm{sn}\,i\eta'}{\mathrm{cn}\,i\eta'}; \qquad \mathrm{cn}\,\eta' = \frac{1}{\mathrm{cn}\,i\eta'}$$

erhält man nun unmittelbar den Ausdruck (37) wieder. Wir haben also, durch die soeben auseinandergesetzte Analyse, zur Evidenz gebracht, dass

die Formeln (36) und (37) sich gegenseitig ersetzen und aus einander folgen, wenn q' in $-q'$ übergeht. In beide Formeln müssen wir aber noch den Werth von dk', resp. dl' einsetzen, bevor die Natur der durch sie dargestellten Functionen als genügend aufgedeckt anzusehen ist.

Durch ähnliche Betrachtungen wie diejenigen, welche zu der Gleichung (12) führten, findet man jetzt:

$$\frac{dk'^2}{ndt} = \frac{2}{a} k^3 X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} - \frac{k^2}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 \tag{41}$$

und wenn man k'^2 als eine kleine Grösse ansieht, deren Potenzen man in der ersten Annäherung vernachlässigen darf, so erhält man diese Function durch Integration der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dk'^2}{ndt} &= k'^2 \left[\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 - \frac{3}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right] \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 + \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \end{aligned} \tag{42}$$

Dieser Werth, in die Formel (36) eingesetzt, giebt uns:

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \frac{\pi}{2K'} \gamma + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k'^2 k^2} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi'} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 - \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k^2} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 - \frac{3}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right\} \end{aligned}$$

oder, wenn wir nur Glieder der hier in Aussicht genommenen Grössenordnung berücksichtigen,

$$\begin{aligned} \Gamma'' &= \frac{\pi}{2K'} \gamma + \frac{\pi}{2k'^2} \frac{\pi}{2K'} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 - \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2K'} \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi} \frac{1}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \end{aligned} \tag{43}$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen ergeben sich nun auch:

$$(44)\qquad \frac{dl'^2}{ndt} = -l'^2\left[\frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{1}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}\right] + \frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{2}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}$$

$$(45)\qquad A' = \frac{\pi}{2L'}\alpha - \frac{1}{2l'^2}\frac{\pi}{2L'}\frac{d\log\theta(i\eta')}{d\eta'}\left\{\frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{2}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}\right\} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2L'}\frac{d\log\theta(i\eta')}{d\eta'}\frac{1}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'},$$

welche Ausdrücke übrigens aus den Gleichungen (42) und (43) hervorgehen, wenn man q' in $-q'$ übergehen lässt.

Die nähere Entwicklung dieser Ausdrücke müssen wir hier übergehen; dieselbe würde gegenwärtig auch kaum ein Interesse darbieten, das im richtigen Verhältnisse zu der damit verbundenen Arbeit stände. Man bemerkt aber leicht, dass die betreffenden Entwicklungen zunächst nach Partialbrüchen, welche Exponentialfunctionen enthalten, vorgenommen werden muss. Man überzeugt sich ferner, dass die Glieder in X und in α^2 so beschaffen sein können, dass nicht nur die Entwicklungen convergiren, sondern dass auch die Function k'^2 oder l'^2 immer einen sehr kleinen positiven oder negativen Werth beibehält, und endlich, dass die betreffenden Entwicklungen auch dann nicht zu gelten aufhören, wenn der Zeichenwechsel bei dem Werthe dieser Functionen eintritt, oder wenn q' in $-q'$ übergeht.

Es erübrigt noch, der Formel:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}X - \frac{a}{\gamma}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2\frac{da}{ndt}$$

zu erwähnen, eine nothwendige Folge der Form, welche für die Darstellung des Integrals der Gleichung (6) vorausgesetzt wurde. Diese Formel enthält übrigens dasselbe, was durch die Gleichung (41) ausgesagt wird,

und lässt sich auch aus dieser herleiten. Wir bemerken noch, dass man die obige Gleichung durch die nachstehende ersetzen kann:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{X}{\operatorname{cn} i\eta'} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\frac{d\alpha}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2};$$

und endlich, dass nach Entwicklung von $\frac{\alpha}{\gamma} = k$, nach den Potenzen von k'^2 oder l'^2, die Ausdrücke:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = X\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} - \frac{d\alpha}{ndt}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}k'^2\frac{d\alpha}{ndt}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi}\right)^2 + \ldots$$

und:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{X}{\operatorname{cn} i\eta'} - \frac{\frac{d\alpha}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{1}{2}l'^2\frac{\frac{d\alpha}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \ldots$$

gewonnen werden. Man übersieht auch hier leicht, dass die Glieder in X und α^2 derartig sein können, dass der veränderliche Theil von γ durch eine convergente Entwicklung dargestellt wird und dabei stets sehr klein bleibt. Wenn aber Glieder in X oder α^2 vorhanden sind, welche in γ oder auch in k'^2 oder in l'^2 so erheblich vergrössert werden, dass die beiden letzteren Functionen nicht als stets sehr kleine Grössen anzusehen sind, so ist die zuletzt untersuchte Form des Integrals der Gleichung (6) nicht mehr zur Darstellung desselben geeignet. Man würde aber auch in solchen Fällen keine Veranlassung haben, sich dieser Form zu bedienen. Denn wenn auch die erste Annäherung zu Werthen der Integrationsconstanten führte, welche die Existenz eines Librationsgliedes mit einem, der Einheit nahe kommenden Coefficienten als wahrscheinlich erscheinen liessen, die späteren Annäherungen müssten doch, falls erhebliche Glieder durch dieselben entstehen, eine solche Libration als nicht vorhanden hinstellen. Man würde in solchen Fällen das Integral wahrscheinlich nach Maassgabe der Gleichung (21) darstellen können, oder, wenn dieses sich als nicht ausführbar erwiese, durch eine der Formen, welche wir im dritten Abschnitte dieser Untersuchungen betrachtet haben. Es wären alsdann

diejenigen Glieder, welche besondere Schwierigkeiten verursachen, für sich zu behandeln, und der Integrationsprocess hinsichtlich des entsprechenden Theiles der Function Z nach den daselbst gegebenen Vorschriften vorzunehmen.

Nachdem wir nun das für unsere Untersuchungen abgesteckte Feld, in verschiedenen Richtungen durchforscht haben, möge es uns noch gestattet sein, einen Überblick auf die Bedeutung der gewonnenen Resultate zu werfen.

Vor Allem sei bemerkt, dass wenn die Entwicklungen der mit Z und $\frac{dZ}{dt}$ bezeichneten Functionen gleichförmig convergent sind, so convergiren auch in derselben Weise die analogen Entwicklungen der übrigen Bahnelemente des gestörten Körpers, und zwar werden diese Entwicklungen in ähnlicher Weise convergiren wie diejenigen, welche für die Function $\frac{dZ}{dt}$ zur Geltung kommen. Wir übergehen den Beweis dieser Behauptung, deren Richtigkeit überdies sehr leicht erkannt wird. Hätten nun unsere Untersuchungen auch die elementären Glieder umfasst, so wären wir bei dem Beweise für die Stabilität des Sonnensystems angelangt oder könnten diesen Beweis auf Grund der gewonnenen Resultate sehr leicht aufstellen. Denn die gefundenen Ausdrücke enthalten nur Glieder, deren Werthe innerhalb gewisser Grenzen hin und her schwanken, dieselben aber jedenfalls nicht überschreiten. Die Coordinaten lassen sich offenbar durch ähnliche Ausdrücke darstellen, und weil zur Herstellung derselben aus den bekannten Ausdrücken für die Elemente keine Integration auszuführen ist, so kann man bei den Werthen, welche im Sonnensysteme den Modularelementen (Modul der Entfernung, der Excentricität und der Neigung) zukommen, ohne weiteres auf die gleichförmige Convergenz der für die Coordinaten geltenden Entwicklungen schliessen, sobald die Convergenz der Ausdrücke für Z und $\frac{dZ}{dt}$ nachgewiesen worden ist.

In den vorhergehenden Auseinandersetzungen ist aber gezeigt worden, wie die Functionen Z und $\frac{dZ}{dt}$ in der einen oder andern Weise in Reihen

entwickelt werden können, welche für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichförmig convergiren; wir schliessen daher, indem wir an den in dieser Abhandlung gemachten Voraussetzungen festhalten, — hinsichtlich der Entwicklungen, welche die Differentiale der Elemente darstellen — dass das Vorhandensein von characteristischen Gliedern die gleichförmige Convergenz der Entwicklungen zur Darstellung der Coordinaten nicht aufheben kann. In zweiter Linie schliessen wir hieraus, dass kleine Änderungen in den Werthen der mittleren Bewegungen wohl analytische Schwierigkeiten nach sich ziehen können, auf die Stabilität des betreffenden Systems jedoch ohne Einfluss sind.

Verbesserungen.

Seite 189	Z.	7 v. u.	steht:	elementären,	lies:	characteristischen.
» 197	»	13 v. o.	»	σ'	»	σ_1.
» 199	»	3 v. o.	»	$s_1 u - s_1 u'$	»	$s_1 \breve{\zeta} \quad s' \breve{\zeta}'$.

ÜBER ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN

VON

E. NETTO

in BERLIN.

Herr T. J. Stieltjes hat im sechsten Bande der Acta Mathematica, S. 319—320 ein Theorem über orthogonale Substitutionen für den Fall von zwei und von drei Variablen ausgesprochen und die Vermutung beigefügt, dasselbe gelte auch für vier Variable. Im Folgenden soll untersucht werden, wann dasselbe allgemein für n Veränderliche gilt, ob es eine Erweiterung zulässt, und wie die in der Voraussetzung ausgesprochenen Bedingungen allgemein festgestellt werden können. Die Frage lautet: *Bedeuten* $a_{k\lambda}$, $A_{k\lambda}$ $(k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ *die Coefficienten zweier orthogonalen Substitutionen von der Determinante* $+1$, *und hat*

$$(1) \qquad | a_{k\lambda} + A_{k\lambda} | \qquad {\scriptstyle (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n)}$$

den Wert Null, wann verschwinden dann gleichzeitig alle Subdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung von* (1)?

Nach den Angaben des Herrn Cayley können die Coefficienten $c_{k\lambda}$ einer orthogonalen Substitution folgendermassen dargestellt werden: Werden die Grössen $b_{k\lambda}$, welche endliche Werte haben sollen, den Bedingungen unterworfen, dass

$$b_{k\lambda} + b_{\lambda k} = 0 \qquad (k \gtrless \lambda)$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = \ldots = b_{nn} = \omega$$

sei, setzt man ferner

$$(2) \qquad | b_{k\lambda} | = d,$$

und bezeichnet mit $\beta_{k\lambda}$ die Adjuncte von $b_{k\lambda}$ in d, dann ist

$$c_{k\lambda} = \frac{2\omega_i\beta_{k\lambda}}{d} \qquad (k \gtrless \lambda)$$

$$c_{kk} = \frac{2\omega_i\beta_{kk}}{d} - 1$$

oder, mit Hülfe des bekannten KRONECKER'schen Zeichens zusammengefasst

(3) $$c_{k\lambda} = \frac{2\omega_i\beta_{\lambda\lambda}}{d} - \varepsilon_{k\lambda}.$$

Wir betrachten nun die Determinante

(4) $$|\, c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda} \,| = \left|\frac{2\omega_i\beta_{k\lambda}}{d}\right|$$

sowie deren Subdeterminanten. Dann erkennt man sofort, dass die erstere den Wert

(5) $$\frac{2^n\omega^n}{d}$$

besitzt, sowie unter Anwendung eines bekannten JACOBI'schen Satzes dass jede Subdeterminante $(n-\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung auf die Form

(6) $$\frac{2^{n-\alpha}\omega^{n-\alpha}}{d}\,|\, c_{k'\lambda'} \,| \qquad \begin{pmatrix} k' = i_1, i_2, \dots, i_\alpha \\ \lambda' \dots \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann.

Weiter ist durch die schon erwähnten CAYLEY'schen Untersuchungen bekannt, dass d nach Potenzen von ω entwickelt die Gestalt annimmt

(7) $$d = \omega^n + \omega^{n-2}\Sigma D_2 + \omega^{n-4}\Sigma D_4 + \dots;$$

hierbei wird ΣD_m für einen ungeraden Index m verschwinden, für einen geraden gleich der Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten sein, also beispielsweise

(8) $$\Sigma D_2 = \Sigma b_{k\lambda}^2. \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \lambda = 2, 3, \dots, n \\ k < \lambda \end{pmatrix}$$

Hieraus erkennt man, dass (4) nur für $\omega = 0$ und dafür auch

wirklich verschwindet, sobald nicht sämtliche $b_{k\lambda}$ $(k < \lambda)$ gleich Null sind, in welchem Falle $c_{k\lambda} = 0$ $(k \gtrless \lambda)$, $c_{kk} = 1$, und jedes Element von (4) gleich Null wird. Es wird nämlich wegen (8) die Determinante d höchstens durch ω^{n-2} teilbar; folglich behält (5), und für $\alpha = 1$ auch (6) sicher den Factor ω in Zähler. Im Allgemeinen, d. h. wenn nicht gleichzeitig die Quadratsummen $\sum D_4$, $\sum D_6$, ... Null werden, verschwinden auch noch die weiteren Subdeterminanten, und zwar bei einem geraden n, wobei $\sum D_n$ das letzte Glied von (7) wird, alle d. h. auch die einzelnen Elemente; bei einem ungeraden n alle Subdeterminanten zweiter Ordnung, da das letzte Glied in (7) jetzt $\omega \sum D_{n-1}$ wird, und also ω^1 sich im Zähler und Nenner hebt.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die beiden orthogonalen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_k &= a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \ldots + a_{kn}y_n \\ \xi_k &= A_{k1}y_1 + A_{k2}y_2 + \ldots + A_{kn}y_n \end{aligned} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

$$\sum x_k^2 = \sum \xi_k^2 = \sum y_k^2,$$

aus denen nach JACOBI folgt

$$y_k = A_{1k}\xi_1 + A_{2k}\xi_2 + \ldots + A_{nk}\xi_n,$$

und folglich, wenn wir zur Abkürzung

$$\sum_\lambda a_{k\lambda} A_{\mu\lambda} = c_{k\mu} \qquad (k, \lambda, \mu=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

setzen, die weitere orthogonale Substitution

$$x_k = c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2 + \ldots + c_{kn}\xi_n. \tag{11}$$

Wir nehmen nun an, dass diese $c_{k\lambda}$ durch die Formeln (3) dargestellt werden können, und untersuchen das Gleichungssystem

$$x_k + \xi_k = c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2 + \ldots + (c_{kk} + 1)\xi_k + \ldots + c_{kn}\xi_n, \tag{12}$$

dessen Determinante durch (4) dargestellt ist. Wir können dann die oben abgeleiteten Sätze hier verwenden; verschwindet die Determinante von

(12), dann ist $\omega = 0$, und sicher sind auch alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ gleichfalls Null; im Allgemeinen werden sogar bei geradem n alle Elemente $c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}$ verschwinden, bei ungeradem n alle Determinanten zweiter Ordnung, welche aus diesen Elementen gebildet werden können. Wir nehmen an, dass die Subdeterminanten der $(n-\alpha)^{\text{ten}}$ Ordnung die ersten seien, bei wachsendem α, die nicht sämtlich verschwinden; dann ist das System der $x_k + \xi_k$ nach Kronecker'scher Ausdrucksweise vom »Range» $(n - \alpha)$, und zwar ist das System α-fach unbestimmt. Es können somit α der Grössen $x_k + \xi_k$ linear durch die übrigen $(n - \alpha)$ ausgedrückt werden.

Nun folgt weiter aus den beiden ersten Gleichungen von (9)

$$(13) \quad x_k + \xi_k = (a_{k1} + A_{k1})y_1 + (a_{k2} + A_{k2})y_2 + \ldots + (a_{kn} + A_{kn})y_n,$$

und wenn nun die Determinante (1) der rechten Seite verschwindet, dann ist das System der $x_k + \xi_k$ mindestens einfach unbestimmt; also ist die Determinante (4) von (12) gleich Null; *wenn also das System* $\sum_\lambda a_{k\lambda} A_{\mu\lambda}$ *durch die Cayley'schen Formeln darstellbar ist, dann sind die Subdeterminanten der* $(n - \alpha)^{\text{ten}}$ *Ordnung von* (1) *die ersten, welche nicht sämtlich verschwinden; dabei ist* α *mindestens zwei. Im Allgemeinen werden dann für ein gerades* n *sämtliche Elemente* $a_{k\lambda} + A_{k\lambda}$ *verschwinden, für ein ungerades* n *sämtliche aus diesen Elementen gebildeten Subdeterminanten zweiter Ordnung.*

Wenn bei geradem n der Wert $A_{k\lambda} = - a_{k\lambda}$ ist, dann werden die beiden Substitutionen (9) sich nur durch die Vorzeichen von einander unterscheiden, und also nur in diesem trivialen Falle kann die Voraussetzung unseres Satzes sich erfüllen.

Bei ungeradem n und $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}| = 0$ muss sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} + A_{11}, & a_{1k} + A_{1k} \\ a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1}, & a_{\lambda k} + A_{\lambda k} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1}}{a_{11} + A_{11}} = \frac{a_{\lambda 2} + A_{\lambda 2}}{a_{12} + A_{12}} = \ldots = \frac{a_{\lambda n} + A_{\lambda n}}{a_{1n} + A_{1n}} = \rho_\lambda$$

$$a_{\lambda 1} + A_{\lambda 1} = \rho_\lambda(a_{11} + A_{11}), \quad \ldots, \quad a_{\lambda n} + A_{\lambda n} = \rho_\lambda(a_{1n} + A_{1n})$$

$$(14) \quad A_{\lambda 1} = \rho_\lambda(a_{11} + A_{11}) - a_{\lambda 1}, \quad \ldots, \quad A_{\lambda n} = \rho_\lambda(a_{1n} + A_{1n}) - a_{\lambda n},$$

und sonach wird

$$(15)\qquad |A_{k\lambda}| = \begin{vmatrix} A_{11} & , A_{12} & , \ldots \\ \rho_2(a_{11} + A_{11}) - a_{21}, & \rho_2(a_{12} + A_{12}) - a_{22}, & \ldots \\ \rho_3(a_{11} + A_{11}) - a_{31}, & \rho_3(a_{12} + A_{12}) - a_{32}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Wir wollen nun die Bedingungen für ρ_2, ρ_3, ... aufsuchen, dafür dass die rechte Seite in (15) eine orthogonale Determinante wird. Man findet leicht, dass

$$(16)\qquad \rho_\lambda = \frac{a_{\lambda 1} A_{11} + a_{\lambda 2} A_{12} + \ldots + a_{\lambda n} A_{1n}}{1 + a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}} \qquad \lambda = 2, 3, \ldots, n$$

die einzigen Bedingungen, sobald die Determinante $|a_{k\lambda}|$ orthogonal giebt, und die Bedingung erfüllt ist

$$(17)\qquad A_{11}^2 + A_{12}^2 + \ldots + A_{1n}^2 = 1.$$

Es fragt sich jetzt lediglich noch, ob die Determinante (15) den Wert $+1$ oder den Wert -1 besitzt. Durch einfache Umformung von (15) kommt man auf den mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirten Wert von $|a_{k\lambda}|$ zurück, so dass also, wie zu erwarten stand, für ein ungerades n die Determinante den Wert $+1$, für ein gerades n dagegen den Wert -1 besitzt. Es sind also für ungerade n wirklich alle Bedingungen erfüllt. —

Nach den Angaben des Herrn Cayley (Crelle's Journal 32, p. 120), denen z. B. auch Herr Baltzer (*Determinanten,* 4. Aufl., p. 175) gefolgt ist, könnte es scheinen, als ob die Annahme, dass die $c_{k\lambda}$ durch die Formeln (3) darstellbar sind, stets erfüllt sei, d. h. als ob dieselben eine allgemeine Darstellung der orthogonalen Systeme von der Determinante $+1$ gäben. Dies ist aber, wie ich einer gütigen Mitteilung des Herrn L. Kronecker entnehme, nicht der Fall. Denn wie man sofort ersieht, kann man in einem durch (3) erlangten Systeme die Vorzeichen einer geraden Anzahl von Zeilen ändern, ohne dass seine wesentlichen Eigenschaften verloren gehen, und ohne dass es möglich wäre, dieses neue System durch endliche Werte von $b_{k\lambda}$ mittels (3) zu erreichen.

Nehmen wir an, dass in den ersten $2m$ Zeilen die Zeichen geändert seien, dann wird in diesen zwar $c_{kk} - \varepsilon_{kk}$ aber nicht $c_{kk} + \varepsilon_{kk}$ durch ω teilbar; deshalb enthält d nur den Factor ω^{n-2m}, und die Subdeterminanten der Ordnung $n - \alpha$ haben nur den Factor $\omega^{n-2m-\alpha}$. Setzt man $(\omega : d)^n$ aus $|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ heraus, entwickelt nach Potenzen von $d:\omega$ und wendet die Sätze über Subdeterminanten conjugirter Systeme an, so findet sich als Erweiterung eines, mir von Herrn Kronecker mitgeteilten Satzes, die Gleichung

$$(4\text{a}) \qquad |c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}| = \frac{2^n \omega^{n-2m}}{d} |(1 - \varepsilon_{\mu\nu}) b_{\mu\nu}|. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, 2m)$$

Hieraus folgt für $n = 3$, $m = 1$, dass ein $b_{\mu\nu} = 0$ sei, und dadurch die Richtigkeit des Stieltjes'schen Theorems; für $n = 4$, $m = 2$ oder 4, dass bei

$$|(1 - \varepsilon_{\mu\nu}) b_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \text{ oder } 1, 2, 3, 4)$$

$|c_{k\lambda} + \varepsilon_{k\lambda}|$ verschwinden kann, ohne dass die Subdeterminanten dritter Ordnung es tun.

Wenn man aber in diesem allgemeinen Falle in die ersten $2m$ Zeilen $c_{kk} - \varepsilon_{kk}$ setzt, dann gilt wieder (3), (4); ändert man also in den entsprechenden Zeilen von (12) das Vorzeichen von ξ_k, dann ergiebt sich wie auf Seite 4 der allgemeine Satz: *In der Determinante* $|a_{k\lambda} + \delta_k A_{k\lambda}|$ *kann* $\delta_k = +1$ *oder* $= -1$ *so gewählt werden, dass sie bei geradem* n *nur verschwinden kann, wenn alle Elemente, bei ungeradem* n, *wenn alle Subdeterminanten zweiter Ordnung gleich Null sind.*

Berlin im Dezember 1886.

DÉDUCTION DE QUELQUES FORMULES ANALYTIQUES D'UN THÉORÈME ÉLÉMENTAIRE DE LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

A. BERGER

à UPSAL.

Si l'on désigne par n un nombre impair positif, l'équation à deux inconnues x, y

$$x^2 + y^2 = n \tag{1}$$

n'a évidemment qu'un nombre limité de solutions entières. Nous dirons, qu'une solution x, y de cette équation est propre ou impropre, selon que le plus grand commun diviseur positif des deux nombres x, y est égal à l'unité ou plus grand que l'unité; nous désignerons dans ce mémoire par

$$\psi(n, d)$$

le nombre des solutions x, y de l'équation (1), pour lesquelles le plus grand commun diviseur positif des nombres x, y est égal à d, et par suite

$$\psi(n, 1)$$

est égal au nombre des solutions propres de cette équation. En posant n sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}, \tag{2}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ sont des nombres premiers positifs et différents les uns des autres, et où les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ satisfont aux conditions

$$\alpha_1 \geqq 1, \quad \alpha_2 \geqq 1, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu \geqq 1, \tag{3}$$

on démontre[1] dans les éléments de la théorie des nombres, que

$$(4) \qquad \psi(n,\ 1) = 2^{\nu+2},$$

si tous les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ satisfont à la congruence

$$p \equiv 1 \pmod 4,$$

mais que

$$(5) \qquad \psi(n,\ 1) = 0,$$

s'il y a un seul de ces nombres, qui satisfait à la congruence

$$p \equiv 3 \pmod 4.$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$(6) \quad \psi(n,\ 1) = 4\left\{1 + (-1)^{\frac{p_1-1}{2}}\right\}\left\{1 + (-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\right\}\cdots\left\{1 + (-1)^{\frac{p_\nu-1}{2}}\right\},$$

formule, qui est vraie pour tous les nombres impairs positifs n. Multiplions les facteurs du second membre de l'équation (6), nous aurons

$$(7) \qquad \psi(n,\ 1) = 4\left\{1 + \sum_r (-1)^{\frac{p_r-1}{2}} + \sum_{r,s} (-1)^{\frac{p_r-1}{2}+\frac{p_s-1}{2}} + \sum_{r,s,t} (-1)^{\frac{p_r-1}{2}+\frac{p_s-1}{2}+\frac{p_t-1}{2}} + \ldots\right\};$$

dans la première somme dans le second membre r prend les valeurs

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu - 1,\ \nu;$$

dans la seconde somme r et s désignent toutes les combinaisons 2 à 2 de ces nombres, dans la troisième somme r, s, t désignent toutes les combinaisons 3 à 3 de ces nombres; ainsi de suite. En multipliant les facteurs du second membre de l'identité

$$(8) \qquad p_r p_s p_t \ldots = [1 + (p_r - 1)][1 + (p_s - 1)][1 + (p_t - 1)] \ldots.$$

[1] Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie von* Lejeune Dirichlet, (Dritte Auflage, §. 68).

nous aurons

$$(9) \qquad p_r p_s p_t \ldots = 1 + (p_r - 1) + (p_s - 1) + (p_t - 1) \ldots$$
$$+ \sum_{r,s} (p_r - 1)(p_s - 1) + \sum_{r,s,t} (p_r - 1)(p_s - 1)(p_t - 1) + \ldots$$

Les nombres p_r, p_s, p_t, ..., étant impairs, nous obtiendrons de l'équation (9)

$$(10) \qquad p_r p_s p_t \ldots \equiv 1 + (p_r - 1) + (p_s - 1) + (p_t - 1) + \ldots \pmod 4$$

ou

$$(11) \qquad \frac{p_r p_s p_t \ldots - 1}{2} \equiv \frac{p_r - 1}{2} + \frac{p_s - 1}{2} + \frac{p_t - 1}{2} + \ldots \pmod 2.$$

En appliquant cette formule à l'équation (7), nous aurons

$$(12) \quad \psi(n, 1) = 4 \left| 1 + \sum_r (-1)^{\frac{p_r - 1}{2}} + \sum_{r,s} (-1)^{\frac{p_r p_s - 1}{2}} + \sum_{r,s,t} (-1)^{\frac{p_r p_s p_t - 1}{2}} + \ldots \right|,$$

et par suite

$$(13) \qquad \psi(n, 1) = 4 \sum_\delta (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

où δ parcourt les nombres

$$1, \ p_r, \ p_r p_s, \ p_r p_s p_t, \ \ldots.$$

Par là est démontré ce théorème:

Théorème I. Si l'on désigne par n un nombre positif impair, le nombre des solutions propres de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = n$$

à deux inconnues x et y est égal à

$$4 \sum_\delta (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n, qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité.

Soient maintenant x, y deux nombres quelconques entiers, qui satisfont à l'équation (1), et désignons par d le plus grand commun diviseur positif des nombres x et y; en posant

$$(14) \qquad x = dx_1, \qquad y = dy_1,$$

les quantités x_1, y_1 seront des nombres entiers, premiers entre eux, qui satisfont à l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{n}{d^2}, \tag{15}$$

et inversement, si l'on désigne par d un nombre entier positif, ainsi choisi, que le nombre carré d^2 soit un diviseur du nombre n, et si les nombres x_1, y_1 sont premiers entre eux et satisfont à l'équation (15), les deux nombres x, y, déterminés par les équations (14), auront le plus grand commun diviseur d, et ces nombres satisferont aussi à l'équation (1). Par là est démontrée la formule

$$\psi(n, d) = \psi\left(\frac{n}{d^2}, 1\right), \tag{16}$$

pourvu que d^2 divise le nombre n. De cette équation on obtiendra, en y appliquant le théorème I, la formule

$$\psi(n, d) = 4\sum_{\delta_1}(-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}}, \tag{17}$$

où δ_1 est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre $\frac{n}{d^2}$, qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité. Le nombre n étant impair, le diviseur d sera aussi impair, et l'on aura

$$d^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

d'où il suit

$$\delta_1 d^2 \equiv \delta_1 \pmod 4;$$

de cette congruence on tire

$$\frac{\delta_1 - 1}{2} \equiv \frac{\delta_1 d^2 - 1}{2} \pmod 2, \tag{18}$$

et par suite on obtiendra de l'équation (17)

$$\psi(n, d) = 4\sum_{\delta_1}(-1)^{\frac{\delta_1 d^2 - 1}{2}}. \tag{19}$$

Puisque δ_1 parcourt tous les diviseurs positifs du nombre $\frac{n}{d^2}$, qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité, le nombre

$\partial_1 d^2$ parcourt évidemment tous les diviseurs positifs du nombre n, qui sont divisibles par d^2, mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2. Par suite, en posant

$$\partial_1 d^2 = \partial,$$

nous obtiendrons de l'équation (19) la formule

$$(20) \qquad \psi(n, d) = 4\sum_{\partial}(-1)^{\frac{\partial-1}{2}},$$

où ∂ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n, qui sont divisibles par d^2, mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2. De là résulte cette proposition:

Théorème II. Soit n un nombre entier positif impair, et d un nombre positif, ainsi choisi, que le nombre carré d^2 soit un diviseur du nombre n, le nombre des solutions entières x, y de l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

pour lesquelles x et y ont le plus grand commun diviseur d, est égal à

$$4\sum_{\partial}(-1)^{\frac{\partial-1}{2}},$$

où ∂ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n, qui sont divisibles par d^2, mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d^2.

Désignons maintenant par $\psi(n)$ le nombre de toutes les solutions (propres et impropres) de l'équation (1), et par

$$d_1, d_2, \ldots, d_\mu$$

tous les nombres positifs, jouissant de la propriété, que les nombres carrés

$$(21) \qquad d_1^2, d_2^2, \ldots, d_\mu^2$$

divisent le nombre n; il s'ensuit, qu'un diviseur quelconque du nombre n n'a d'autres diviseurs quadratiques que les nombres (21), et l'on aura évidemment la formule

$$(22) \qquad \psi(n) = \sum_{s=1}^{s=\mu}\psi(n, d_s)$$

ou d'après l'équation (20)

$$\psi(n) = 4\sum_{s=1}^{s=\mu}\sum_{\delta_s}(-1)^{\frac{\delta_s-1}{2}}, \tag{23}$$

où δ_s est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n, qui sont divisibles par d_s^2, mais qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que d_s^2. L'équation (23) peut se mettre sous la forme

$$\psi(n) = 4\left\{\sum_{\delta_1}(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}} + \sum_{\delta_2}(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} + \ldots + \sum_{\delta_\mu}(-1)^{\frac{\delta_\mu-1}{2}}\right\}. \tag{24}$$

Les groupes de nombres

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots,\ \delta_\mu, \tag{25}$$

qui entrent dans le second membre de l'équation (24), ne contiennent d'autres nombres que les diviseurs positifs du nombre n. Je dis de plus, que ces groupes contiennent tous les diviseurs positifs du nombre n, car en désignant par d un diviseur positif quelconque du nombre n, ce diviseur d est nécessairement divisible par un ou par plusieurs des nombres carrés (21) et ne peut pas être divisible par d'autres nombres carrés que ceux-ci. Par suite on peut déterminer un nombre carré d_s^2, qui appartient au groupe (21) et qui a la propriété, que d est divisible par d_s^2, mais que d n'est divisible par aucun nombre carré plus grand que d_s^2, d'où l'on peut conclure, que le diviseur d appartient au groupe δ_s. Enfin les nombres, qui appartiennent à un quelconque des groupes (25), sont complétement caractérisés par leur plus grand commun diviseur quadratique, et par suite un diviseur quelconque du nombre n appartient à un seul de ces groupes.

Il s'ensuit, que les nombres, qui appartiennent à tous les groupes (25), seront précisément tous les diviseurs positifs du nombre n, et par conséquent l'équation (24) peut se mettre sous la forme

$$\psi(n) = 4\sum_{\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}, \tag{26}$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n. De là résulte le théorème suivant, que nous avons démontré ici par un calcul tout à fait élémentaire.

Théorème III. Si l'on désigne par n un nombre positif impair, le nombre de toutes les solutions entières (propres et impropres) de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = n$$

est égal à

$$4\sum_{\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n.[1]

En attribuant dans l'expression

$$x^2 + y^2$$

aux variables x et y toutes les valeurs entières, nous n'obtiendrons que des nombres entiers positifs; pour que ces nombres soient impairs, il faut et il suffit, que les nombres x et y satisfassent à la congruence

(27) $$x + y \equiv 1 \pmod 2.$$

Cela posé, désignons par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs positives impaires de la variable z, et formons la série

$$\sum_{x,y}\Phi(x^2 + y^2)$$

de manière, que l'on attribue aux quantités x et y toutes les valeurs entières compatibles avec la condition (27), nous n'obtiendrons que des termes de la forme

$$\Phi(n),$$

où n désigne un nombre positif impair, et d'après le théorème III nous obtiendrons le terme $\Phi(n)$ un nombre de fois exprimé par:

$$4\sum_{\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}};$$

par suite on aura l'identité

(28) $$\sum_{x,y}\Phi(x^2 + y^2) = 4\sum_{n}\Phi(n)\sum_{\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}.$$

[1] Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie von* Lejeune-Dirichlet, (Dritte Auflage, § 91), où ce théorème est démontré au moyen du calcul infinitésimal.

Les nombres x, y dans le premier membre de cette équation satisfaisant à la congruence (27), on aura ou

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 1 \pmod 2$$

ou

$$x \equiv 1, \quad y \equiv 0 \pmod 2.$$

Par suite, en désignant par h_0 tous les nombres pairs et par h_1 tous les nombres impairs, on obtient:

$$(29) \qquad \sum_{x,y} \Phi(x^2 + y^2) = \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) + \sum_{h_1, h_0} \Phi(h_1^2 + h_0^2) = 2 \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2),$$

et des équations (28) et (29) on conclura la formule

$$(30) \qquad \sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_n \Phi(n) \sum_\delta (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

et on a donc ce théorème:

Théorème IV. Si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs positives impaires de la variable z, on aura la formule

$$\sum_{h_0, h_1} \Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2 \sum_n \Phi(n) \sum_\delta (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}},$$

où l'on a à observer, que dans le premier membre h_0 parcourt tous les nombres pairs et h_1 tous les nombres impairs, et que dans le second membre n parcourt tous les nombres impairs positifs et δ tous les diviseurs positifs du nombre n, pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Nous transformerons maintenant la formule (30). Désignons pour cela par $\mathfrak{g}(n)$ une fonction, qui pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2 satisfait à la condition

$$(31) \qquad \mathfrak{g}(n_1)\,\mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2),$$

on aura évidemment une égalité de la forme

$$(32) \qquad \sum_{n_1} \sum_{n_2} (-1)^{\frac{n_1 - 1}{2}} \mathfrak{g}(n_1)\,\mathfrak{g}(n_2)\,\Phi(n_1 n_2) = \sum_n c_n \Phi(n),$$

où chacun des nombres n, n_1, n_2 parcourt tous les nombres impairs positifs; en effet, si l'on attribue aux quantités n_1 et n_2 toutes les valeurs entières positives impaires, nous n'obtiendrons de l'expression $\Phi(n_1 n_2)$ que des termes de la forme $\Phi(n)$, où n désigne un nombre positif impair; quant au coefficient c_n, celui-ci sera évidemment déterminé par la formule

$$c_n = \sum_{n_1} \sum_{n_2} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1)\mathfrak{g}(n_2), \tag{33}$$

où les nombres impairs positifs n_1 et n_2 sont combinés entre eux de toutes les manières, qui sont compatibles avec la condition

$$n_1 n_2 = n;$$

par suite, en désignant par δ un diviseur positif quelconque du nombre n et par δ_1 le diviseur complémentaire, ainsi que l'on aura toujours

$$\delta\delta_1 = n,$$

l'équation (33) pourra se mettre sous la forme

$$c_n = \sum_{\delta\delta_1 = n} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \mathfrak{g}(\delta)\mathfrak{g}(\delta_1) \tag{34}$$

ou, en y appliquant l'équation (31),

$$c_n = \mathfrak{g}(n) \sum_{\delta\delta_1 = n} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

formule, qui peut aussi s'écrire

$$c_n = \mathfrak{g}(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}, \tag{35}$$

où δ est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre n. En introduisant dans le second membre de l'équation (32) la valeur du coefficient c_n, donnée par la formule (35), nous aurons

$$\sum_{n_1} (-1)^{\frac{n_1-1}{2}} \mathfrak{g}(n_1) \sum_{n_2} \mathfrak{g}(n_2) \Phi(n_1 n_2) = \sum_{n} \mathfrak{g}(n) \Phi(n) \sum_{\delta} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}. \tag{36}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (30) la fonction $\Phi(n)$ par $\mathfrak{g}(n)\Phi(n)$, nous obtiendrons au moyen de l'équation (36) la formule

$$(37)\qquad \sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2)\Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}\mathfrak{g}(n_1)\sum_{n_2}\mathfrak{g}(n_2)\Phi(n_1 n_2);$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème V. Si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs impaires positives de la variable z, et par $\mathfrak{g}(n)$ une fonction, qui pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2 satisfait à la condition

$$\mathfrak{g}(n_1)\mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2),$$

on aura

$$\sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2)\Phi(h_0^2 + h_1^2) = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}\mathfrak{g}(n_1)\sum_{n_2}\mathfrak{g}(n_2)\Phi(n_1 n_2),$$

où l'on a à observer, que dans le premier membre h_0 parcourt tous les nombres pairs et h_1 tous les nombres impairs, et que dans le second membre n_1 et n_2 parcourent tous les nombres impairs positifs, pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Nous allons faire quelques applications de ce théorème. Posons

$$\Phi(n) = q^n,$$

où q désigne une quantité, dont le module est moindre que l'unité, nous aurons la formule

$$(38)\qquad \sum_{h_0, h_1} \mathfrak{g}(h_0^2 + h_1^2) q^{h_0^2 + h_1^2} = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}\mathfrak{g}(n_1)\sum_{n_2}\mathfrak{g}(n_2) q^{n_1 n_2}.$$

Pour

$$\mathfrak{g}(n) = 1$$

on en déduit

$$(39)\qquad \sum_{h_0} q^{h_0^2}\sum_{h_1} q^{h_1^2} = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}}\frac{q^{n_1}}{1 - q^{2n_1}},$$

formule, qu'on peut mettre sous la forme [1]

$$(40)\qquad (1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \ldots)(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \ldots)$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \ldots .$$

Pour

$$\mathfrak{g}(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

l'équation

$$\mathfrak{g}(n_1)\,\mathfrak{g}(n_2) = \mathfrak{g}(n_1 n_2)$$

subsiste pour tous les nombres impairs positifs n_1 et n_2, et nous obtiendrons de l'équation (38)

$$(41)\qquad \sum_{h_0, h_1}(-1)^{\frac{(h_0^2+h_1^2)^2-1}{8}} q^{h_0^2+h_1^2} = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}+\frac{n_1^2-1}{8}}(q^{n_1} - q^{3n_1} - q^{5n_1} + q^{7n_1} + \ldots)$$
$$= 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}+\frac{n_1^2-1}{8}} q^{n_1}\frac{1-q^{2n_1}}{1+q^{4n_1}}.$$

Des congruences

$$h_0 \equiv 0 \pmod 2, \qquad h_1 \equiv 1 \pmod 2$$

on déduit

$$(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1 \equiv 2h_0^2h_1^2 + (h_1^2 + 1)(h_1^2 - 1) \pmod{16},$$

et, en y appliquant la congruence

$$h_1^2 \equiv 1 \pmod 8,$$

on aura

$$(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1 \equiv 2h_0^2 \pmod{16},$$

d'où

$$\frac{(h_0^2 + h_1^2)^2 - 1}{8} \equiv \frac{h_0^2}{4} \equiv \frac{h_0}{2} \pmod 2,$$

[1] Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie von* LEJEUNE DIRICHLET, (Dritte Auflage, §. 92

et par suite on obtiendra de l'équation (41)

$$(42)\qquad \sum_{h_0, h_1}(-1)^{\frac{h_0}{2}} q^{h_0^2+h_1^2} = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{n_1-1}{2}+\frac{n_1^2-1}{8}} q^{n_1}\frac{1-q^{2n_1}}{1+q^{4n_1}}$$

ou

$$(43)\qquad \sum_{h_0}(-1)^{\frac{h_0}{2}} q^{h_0^2}\sum_{h_1} q^{h_1^2} = 2\sum_{n_1}(-1)^{\frac{(n_1-1)(n_1+5)}{8}} q^{n_1}\frac{1-q^{2n_1}}{1+q^{4n_1}}$$

ou, en divisant les deux membres par 2,

$$(44)\qquad (1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}\ldots)(q+q^9+q^{25}+q^{49}+\ldots)$$
$$= q\frac{1-q^2}{1+q^4}+q^3\frac{1-q^6}{1+q^{12}}-q^5\frac{1-q^{10}}{1+q^{20}}-q^7\frac{1-q^{14}}{1+q^{28}}+\ldots.$$

En désignant par m un nombre entier positif, la somme

$$\psi(1)+\psi(3)+\psi(5)+\ldots+\psi(2m-1)$$

est évidemment égale à la somme des nombres des solutions entières des équations indéterminées

$$(45)\qquad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=3,\quad x^2+y^2=5,\ \ldots\ x^2+y^2=2m-1$$

ou égale au nombre de toutes les solutions entières simultanées de l'inégalité

$$(46)\qquad x^2+y^2<2m$$

et de la congruence

$$(47)\qquad x+y\equiv 1 \pmod 2;$$

en effet chaque solution entière d'une quelconque des équations (45) satisfera aussi aux relations (46) et (47), et inversement chaque solution entière de ces deux relations satisfera à une des équations (45). Posons maintenant

$$(48)\qquad \xi=\frac{x}{\sqrt{2m}},\qquad \eta=\frac{y}{\sqrt{2m}},$$

où ξ et η sont deux inconnues nouvelles, il s'ensuit, que la somme

$$\psi(1)+\psi(3)+\ldots+\psi(2m-1)$$

est égale au nombre de toutes les solutions ξ, η de l'inégalité

$$(49) \qquad \xi^2 + \eta^2 < 1,$$

où ξ et η désignent des quantités des formes (48), les quantités x et y étant des nombres entiers, qui satisfont à la congruence (47). Quant aux solutions de cette congruence, on peut les trouver de la manière suivante. En désignant par x et y deux nombres entiers quelconques, qui satisfont à la congruence, et en posant

$$(50) \qquad \frac{y - x + 1}{2} = r, \qquad \frac{y + x + 1}{2} = s,$$

les quantités r et s seront évidemment des nombres entiers, et des équations (50) on tire

$$(51) \qquad x = s - r, \qquad y = r + s - 1.$$

Nous démontrons ainsi, que nous obtiendrons toutes les solutions de la congruence (47) en laissant dans les formules (51) r et s parcourir tous les nombres entiers et en combinant ces nombres entre eux de toutes les manières possibles, et inversement on trouvera, que les valeurs, ainsi obtenues, des nombres x et y satisferont à la congruence (47). Enfin nous obtiendrons par là chaque solution seulement une fois, car à chaque solution x, y correspondent d'après les équations (50) des valeurs déterminées des quantités r et s.

En introduisant dans les équations (48) les valeurs des nombres x et y, données par les formules (51), nous trouverons, que la somme

$$\psi(1) + \psi(3) + \ldots + \psi(2m - 1)$$

est égale au nombre de toutes les solutions ξ, η de l'inégalité (49) qui sont de la forme

$$(52) \qquad \xi = \frac{s - r}{\sqrt{2m}}, \qquad \eta = \frac{r + s - 1}{\sqrt{2m}},$$

où r et s désignent des nombres entiers quelconques.

En considérant les quantités ξ et η comme des coordonnées rectangulaires d'un point, et en désignant par G la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées satisfont à la condition (49), mais

qui ne contient d'autres points que ceux-ci, cette portion du plan sera évidemment limitée, et nous trouverons, que la somme

$$\psi(1) + \psi(3) + \ldots + \psi(2m-1)$$

est égale au nombre de tous les points dans la portion G, dont les coordonnées sont de la forme (52). Mais on peut aussi considérer ces points comme les points d'intersection des deux systèmes de droites

$$(53) \qquad \eta = \xi + \frac{2r-1}{\sqrt{2m}}, \qquad \eta = -\xi + \frac{2s-1}{\sqrt{2m}},$$

où r et s parcourent tous les nombres entiers. Ces systèmes de droites sont orthogonaux, et les droites, qui appartiennent à chacun des deux systèmes, sont situées à la distance

$$\sqrt{\frac{1}{m}}$$

l'une de l'autre; il s'ensuit, que par ces droites la portion G du plan est divisée en des carrés égaux, et que l'aire de chaque carré est égal à

$$\frac{1}{m}.$$

Le nombre de ces carrés est égal au nombre des points d'intersection susdits, car à chaque carré appartiennent quatre points d'intersection, savoir les sommets du carré, mais de l'autre côté chaque point d'intersection est un sommet commun à quatre carrés. Par suite le nombre de ces carrés est égal à la somme

$$\psi(1) + \psi(3) + \ldots + \psi(2m-1);$$

or, une portion finie du plan étant divisée en des carrés égaux, dont on peut diminuer indéfiniment la grandeur, la limite du produit du nombre des carrés et de l'aire de chaque carré est évidemment égale à l'aire de cette portion du plan; donc, en désignant l'aire de la portion G par π, nous aurons

$$(54) \qquad \lim_{m=\infty} \frac{\psi(1) + \psi(3) + \ldots + \psi(2m-1)}{m} = \pi,$$

et il en résulte ce théorème:

Théorème VI. En désignant par π l'aire de la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées rectangulaires ξ, η satisfont à l'inégalité

$$\xi^2 + \eta^2 < 1,$$

mais qui ne renferme d'autres points que ceux-ci, chaque nombre positif impair peut se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2,$$

où x et y désignent des nombres entiers, en moyenne de π manières différentes.

En désignant par $\mu(n)$, n étant un nombre impair positif, l'excès du nombre de ceux des diviseurs positifs δ du nombre n, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 1 \pmod 4,$$

sur le nombre de ceux de ces diviseurs, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 3 \pmod 4,$$

on aura évidemment

(55) $$\mu(n) = \sum_\delta (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

où δ parcourt tous les diviseurs positifs du nombre n, et des équations (26) et (55) nous obtiendrons

(56) $$\mu(n) = \frac{\psi(n)}{4},$$

et par suite, m étant un nombre entier positif quelconque,

(57) $$\sum_{r=1}^{r=m} \mu(2r-1) = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{r=m} \psi(2r-1);$$

des équations (54) et (57) on déduit la formule

(58) $$\lim_{m=\infty} \frac{\mu(1) + \mu(3) + \ldots + \mu(2m-1)}{m} = \frac{\pi}{4}.$$

De là résulte cette proposition:

Théorème VII. L'excès du nombre de ceux des diviseurs positifs δ d'un nombre impair, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 1 \pmod 4,$$

sur le nombre de ceux des diviseurs du même nombre, qui satisfont à la congruence

$$\delta \equiv 3 \pmod 4,$$

est en moyenne égal à $\frac{\pi}{4}$, la quantité π ayant le même sens que dans le théorème précédent.

Puisque dans l'équation (26) n est un nombre positif impair, et que δ à la sommation dans le second membre ne parcourt que des nombres positifs impairs, on peut y poser

$$n = 2r - 1, \qquad \delta = 2k - 1,$$

où r et k sont des nombres entiers positifs; par ces substitutions on déduit de l'équation (26)

$$(59) \qquad \psi(2r-1) = 4\sum_k (-1)^{k-1},$$

où k parcourt tous les nombres entiers positifs, pour lesquels $2k-1$ divise $2r-1$. En désignant par $E(x)$, x étant une quantité réelle, le plus grand des nombres entiers, qui ne surpassent pas x, de sorte que l'on aura

$$0 \leq x - E(x) < 1,$$

la différence

$$E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right) - E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right)$$

sera égale à 1 ou à 0, selon que $2k-1$ divise ou ne divise pas $2r-1$, et par suite on pourra mettre l'équation (59) sous la forme

$$(60) \qquad \psi(2r-1) = 4\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right) - E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right)\right\}(-1)^{k-1},$$

d'où l'on tire

$$(61)\qquad \sum_{r=1}^{r=m}\psi(2r-1)=4\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}\sum_{r=1}^{r=m}\left\{E\left(\frac{2r-1}{2k-1}\right)-E\left(\frac{2r-2}{2k-1}\right)\right\}.$$

La différence dans le second membre étant égale à 1 ou à 0, selon que $2r-1$ est un multiple ou n'est pas un multiple de $2k-1$, la dernière somme dans le second membre sera égale au nombre de ceux des nombres

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2m-1,$$

qui sont divisibles par $2k-1$; en désignant ce nombre par t, nous aurons évidemment pour la détermination de la quantité t les inégalités

$$(62)\qquad (2t-1)(2k-1)\leqq 2m-1<(2t+1)(2k-1),$$

d'où l'on tire

$$(63)\qquad t\leqq\frac{2m-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2}<t+1,$$

ou

$$(64)\qquad t=E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2}\right),$$

et par conséquent nous obtiendrons de l'équation (61)

$$(65)\qquad \sum_{r=1}^{r=m}\psi(2r-1)=4\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1}E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2}\right).$$

Les termes de la série dans le second membre étant décroissants et ayant des signes alternés, nous obtiendrons de l'équation (65), q étant un nombre positif quelconque,

$$(66)\qquad \sum_{r=1}^{r=m}\psi(2r-1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{k=q}(-1)^{k-1}E\left(\frac{2m-1}{2(2k-1)}+\frac{1}{2}\right)+4\theta(-1)^{q}E\left(\frac{2m-1}{2(2q+1)}+\frac{1}{2}\right),$$

où $0 < \theta < 1$. On tirera de là, en s'appuyant sur la définition du symbole $E(x)$,

(67)
$$\sum_{r=1}^{r=m} \psi(2r - 1)$$
$$= 4\sum_{k=1}^{k=q} (-1)^{k-1} \left(\frac{2m-1}{2(2k-1)} + \rho_k\right) + 4\theta_1 (-1)^q \left(\frac{2m-1}{2(2q+1)} + \frac{1}{2}\right),$$

où $-\frac{1}{2} < \rho_k \leqq \frac{1}{2}$ et $0 < \theta_1 < 1$. En posant

$$q = E(\sqrt{m})$$

et en divisant les deux membres de l'équation (67) par m, on aura pour $m = \infty$

(68)
$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{r=m} \psi(2r - 1) = 4\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

et des équations (54) et (68) on obtiendra la formule

(69)
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots.$$

Enfin nous emploierons l'équation (40) à l'évaluation d'une intégrale définie; désignons pour ce but par q une quantité positive, moindre que l'unité, et posons

(70)
$$S_0 = 1 + q^4 + q^{16} + q^{36} + \dots,$$

(71)
$$S_1 = q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots,$$

il s'ensuit

(72)
$$S_0 - S_1 = 1 - q + q^4 - q^9 + q^{16} - q^{25} + \dots.$$

Les termes de cette série étant décroissants et ayant des signes alternés, nous aurons évidemment

(73)
$$S_0 - S_1 = \rho,$$

où $0 < \rho < 1$. Au moyen des équations (70), (71), (73) on peut mettre l'équation (40) sous la forme

$$(74) \qquad 2S_0^2\left(1 - \frac{1}{2S_0}\right)\left(1 - \frac{\rho}{S_0}\right) = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \ldots;$$

multiplions les deux membres de cette équation par

$$1 - q,$$

nous en obtiendrons pour $q = 1$

$$(75) \qquad \lim_{q=1}(1-q)S_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

d'où l'on tire, en y appliquant la formule (69),

$$(76) \qquad \lim_{q=1}\sqrt{1-q}\; S_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Puisque on a

$$\lim_{q=1}\frac{1-q}{-\log q} = 1,$$

nous obtiendrons des équations (70) et (76)

$$(77) \qquad \lim_{q=1}\sqrt{-\log q}\,(1 + q^4 + q^{16} + q^{36} + \ldots) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Substituons dans cette équation

$$q = e^{-\delta^2},$$

où δ désigne une quantité positive, nous aurons

$$(78) \qquad \lim_{\delta=0}\delta(1 + e^{-\delta^2} + e^{-4\delta^2} + e^{-9\delta^2} + \ldots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, par suite, conformément à la notion d'intégrale définie,

$$(79) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Des formules (69) et (79), que nous avons déduites d'une proposition élémentaire de la théorie des nombres, résulte le théorème suivant:

Théorème VIII. Si l'on désigne par π l'aire de la portion du plan, qui renferme tous les points, dont les coordonnées rectangulaires ξ, η satisfont à l'inégalité

$$\xi^2 + \eta^2 < 1,$$

mais qui ne renferme d'autres points que ceux-ci, on aura

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

SUR LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

PAR

H. POINCARÉ
à PARIS.

C'est à CAUCHY que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires; cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'analyse mathématique et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où on cultive les sciences exactes, et en particulier en Allemagne et en France.

Il semblait qu'il n'y avait plus qu'un pas à faire pour étendre cette théorie aux intégrales doubles et qu'on pouvait se promettre de cette extension d'aussi belles conquêtes que de la considération des intégrales simples. Il y avait là de quoi tenter l'ambition des géomètres et cependant, au bout de quarante ans, nous sommes à peine plus avancés qu'au premier jour.

La plupart des tentatives qui ont été faites n'ont été que des échecs ou des demi-succès.

On croit pourtant que JACOBI possédait à ce sujet plusieurs résultats importants; mais ces résultats n'ont pas été publiés et ont été perdus pour la science.

M. MAXIMILIEN MARIE a entrepris de résoudre la question et écrit, peu de temps après la découverte de CAUCHY, plusieurs mémoires qui ont été publiés longtemps après dans le 44me Cahier du Journal de l'école polytechnique. Ses efforts néanmoins n'ont pas été heureux. Je ne parlerai pas ici de l'insuffisance de certains raisonnements fondés sur des considérations infinitésimales. Bien que toutes les démonstrations soient

à refaire, la formule à laquelle l'auteur parvient est exacte si on l'interprète convenablement, mais elle exigerait pour pouvoir être appliquée sans crainte d'erreur une discussion délicate que M. Marie n'a pas faite.

Pour faire comprendre la nécessité de cette discussion, je ne citerai qu'un seul exemple. L'auteur donne (l. cit. p. 58) la formule suivante:

$$\frac{a^2}{2}\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \sqrt{-1}$$

Cette formule est manifestement fausse; car on a dans le premier membre a^2 et dans le second le facteur a^3. En réalité l'intégrale du premier membre est nulle.

Comment la formule de M. Marie se trouve-t-elle en défaut? Il est aisé de le voir; dans cette formule entre le volume limité par une surface qui, dans l'espace, a pour équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

C'est une sphère, et l'auteur écrit que ce volume est $\frac{4}{3}\pi a^3$. Mais pour appliquer correctement la formule, il aurait fallu regarder cette surface non comme une sphère, mais comme un tore dégénéré dont la section méridienne aurait son centre sur l'axe de révolution. Le volume aurait alors été nul, et on aurait trouvé:

$$\frac{a^2}{2}\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On voit quels piéges aurait à redouter l'analyste inexpérimenté qui voudrait faire usage de la formule de M. Marie.

Les premières recherches de M. Picard présentent beaucoup plus d'intérêt, comme tout ce qui sort de la plume de cet auteur. Mais elles ne se rapportent qu'indirectement à la question.

Dans deux notes insérées aux Comptes Rendus le 29 Janvier 1883 et le 1er Février 1886, M. Picard étudie les intégrales définies comme il suit.

Soit $F(x, y)$ une fonction non uniforme de x et de y; introduisons deux variables auxiliaires u et v, en posant:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v).$$

Je supposerai que les fonctions φ et ψ sont uniformes et de plus que

$$F(x, y) = \Phi(u, v)$$

est une fonction uniforme de u et de v.

Cela posé, soient u_0, v_0 et u_1, v_1 deux systèmes de valeurs de u et de v. Imaginons que ces deux systèmes de valeurs correspondent à un même système de valeurs de x et de y.

L'intégrale envisagée par M. Picard est alors:

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} dv\, \Phi(u, v)\left(\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}\right).$$

M. Picard a donné à ces intégrales le nom de périodes; je ne saurais l'en blâmer puisque cette dénomination lui a permis d'exprimer dans un langage plus concis les intéressants résultats auxquels il est parvenu. Mais je crois qu'il serait fâcheux qu'elle s'introduisît définitivement dans la science et qu'elle serait propre à engendrer de nombreuses confusions.

Et cela pour deux raisons:

D'abord ces intégrales ne sont pas des constantes, comme le fait fort bien observer M. Picard.

En second lieu, il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires u et v qui satisfont aux conditions énoncées. Chacun de ces systèmes donne pour l'intégrale une valeur différente. Il en résulterait que, si on voulait donner à cette intégrale le nom de période, cette période ne dépendrait pas uniquement de la fonction $F(x, y)$ à laquelle elle appartient, mais bien de ces variables soi-disant auxiliaires qui joueraient ainsi un rôle prépondérant.

M. Stieltjes a adressé à M. Hermite un travail fort remarquable où il cherchait à généraliser diverses formules de Cauchy et de Lagrange. Malheureusement quelques points restaient obscurs et l'auteur ne put les éclaircir de façon à se mettre à l'abri de toute objection. C'est ce qui le détermina à ne pas publier son mémoire, mais je tiens à lui rendre ici justice. Je chercherai plus loin à expliquer quels sont les points qui avaient arrêté M. Stieltjes et à montrer comment ses démonstrations peuvent être rendues parfaitement rigoureuses.

Le 25 Janvier 1886, j'eus l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences une note où j'étudiais à un point à un point de vue nouveau les périodes des intégrales doubles, et en particulier celles qui sont analogues aux périodes polaires des intégrales simples. Ce sont les résultats de cette note que je veux développer dans le présent travail.

Peu de temps après, M. Picard (Comptes Rendus, 15 et 26 Février 1886) se plaçant au même point de vue que moi a obtenu un grand nombre de résultats remarquables. Le savant géomètre emploie dans ces deux notes le mot de période avec la signification que nous lui donnerons dans la suite. Les périodes qu'il étudie n'ont donc aucun rapport avec les intégrales qu'il avait primitivement désignées sous ce nom. Je crois devoir insister sur ce point afin de rendre toute confusion impossible.

§ 1. *Modes de représentation.*

Les difficultés contre lesquelles les géomètres se sont heurtés si souvent dans la théorie qui nous occupe, n'ont rien d'essentiel et ne sont pour ainsi dire qu'une question de langage.

Dans l'étude des intégrales simples, on emploie un mode de représentation géometrique très commode et dont il semble qu'on pourrait difficilement se passer. On ne peut le transporter sans changement dans la théorie des intégrales doubles, pour une raison qu'il est aisé d'apercevoir.

Soient ξ et η deux variables complexes; si nous posons

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

en séparant les parties réelle et imaginaire, nous aurons quatre variables x, y, z et t. Nous ne pouvons les regarder comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à moins de nous résigner à admettre un espace à quatre dimensions.

On se trouve donc en présence du dilemme suivant: il faut, ou renoncer à toute représentation, ou employer l'hypergéométrie; mais, dans ce dernier cas, on est exposé à rebuter la plupart des lecteurs, et de plus on ne possède que l'avantage d'un langage commode, mais incapable de parler aux sens.

Comme cette langue hypergéométrique répugne encore à beaucoup de bons esprits, je n'en ferai qu'un usage peu fréquent; je crois néanmoins nécessaire de préciser ici le sens des termes que je lui emprunterai.

Un point est un système de valeurs des quatre variables x, y, z et t.

L'ensemble des points qui satisfont à une seule relation entre x, y, z et t est une «multiplicité à trois dimensions» que l'on appelle *hypersurface*.

L'ensemble des points qui satisfont à deux relations simultanées est une «multiplicité à deux dimensions» que l'on appellera *surface*.

L'ensemble des points qui satisfont à trois relations simultanées est une «multiplicité à une dimension» à laquelle on conservera le nom de *ligne*.

Deux surfaces quelconques ont au point de vue analytique un certain nombre de points communs; mais il peut arriver que tous ces points deviennent imaginaires; comme nous ne considérons que des points réels, nous dirons alors que ces deux surfaces n'ont aucun point commun.

Une intégrale double doit être étendue à tous les points d'une surface. Nous aurons donc une *surface d'intégration* de même qu'on a, dans la théorie des intégrales simples, un chemin d'intégration.

De plus l'ensemble des points singuliers formera une surface.

Supposons en effet que la fonction sous le signe $\iint$ soit le quotient de deux polynômes entiers $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$. Pour que cette fonction devienne infinie, il faut que

$$Q(\xi, \eta) = 0. \tag{1}$$

Mais on a en séparant les parties réelle et imaginaire

$$Q(\xi, \eta) = Q_1(x, y, z, t) + iQ_2(x, y, z, t)$$

de sorte que la relation (1) se décompose en deux:

$$Q_1(x, y, z, t) = 0$$

$$Q_2(x, y, z, t) = 0.$$

Elle représente donc une surface.

Il faudra alors que la surface d'intégration et les surfaces singulières n'aient aucun point commun.

Si la fonction sous le signe $\iint$ est algébrique, les surfaces singulières seront algébriques. Au contraire la surface d'intégration étant purement arbitraire ne sera pas forcément algébrique; elle pourra être transcendante ou se composer de portions appartenant à diverses surfaces algébriques.

Je vais maintenant exposer les artifices à l'aide desquels je compte m'affranchir de la nécessité de considérations hypergéométriques.

Soient λ, μ, ν trois quantités que je regarderai comme les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et considérons une surface algébrique ou portion de surface algébrique S sur laquelle se trouve le point λ, μ, ν. Ecrivons:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des fonctions rationnelles de λ, μ, ν dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle de ces variables. Il est clair que quand le point λ, μ, ν décrira dans l'espace ordinaire la surface ou portion de surface S, le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine surface ou portion de surface S'; de telle sorte que la surface S' est définie par la surface S et par les quatre *fonctions fondamentales* φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4.

Si la surface S est fermée, nous dirons aussi que la surface S' est fermée.

La notion des surfaces d'intégration fermées qui va jouer un si grand rôle dans ce qui va suivre se trouve ainsi nettement définie.

Le genre de la surface S (au point de vue de la géométrie de situation) sera aussi le même que le genre de la surface S', à moins que le point x, y, z, t ne décrive deux ou plusieurs fois la surface S', ce que nous ne supposerons pas.

Lorsque l'on donnera à λ, μ, ν toutes les valeurs réelles possibles, le point λ, μ, ν décrira l'espace tout entier, et le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine hypersurface unicursale.

Tant donc que le point x, y, z, t restera sur cette hypersurface, nous pourrons le représenter par un point de l'espace ordinaire et nous serons affranchis de l'hypergéométrie.

Dans certaines questions nous n'envisagerons que des surfaces d'intégration situées sur une même hypersurface unicursale et nous pourrons nous servir de ce mode de représentation.

La plupart du temps nous supposerons simplement:

$$x = \varphi_1 = \lambda, \quad y = \varphi_2 = \mu, \quad z = \varphi_3 = \nu, \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu) = \varphi_4(x, y, z).$$

Alors le point x, y, z, t sera représenté par le point de l'espace x, y, z et la quatrième coordonnée t sera une fonction rationelle de x, y, z.

La surface d'intégration sera alors définie par une surface S située dans l'espace ordinaire (x, y, z) et par une fonction rationnelle φ_4. On aura:

$$t = \frac{P(x, y, z}{Q(x, y, z}$$

P et Q étant deux polynômes entiers, et nous supposerons qu'on n'a en aucun point réel de l'espace (x, y, z)

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Il est aisé de démontrer que toute surface d'intégration ou bien est susceptible de ce mode de représentation, ou bien diffère très peu d'une surface qui en est susceptible, ou bien enfin peut être décomposée en plusieurs autres qui diffèrent très peu de surfaces algébriques admettant ce mode de représentation.

Ce mode de représentation est donc suffisamment général pour s'appliquer à tous les cas; cependant il sera quelquefois plus commode de le modifier un peu.

Reprenons les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

dont il a été question plus haut.

Nous avons supposé jusqu'ici que ces quatre fonctions étaient rationnelles; il nous suffit qu'elles soient uniformes et bien déterminées. Il peut même suffire que sans être uniformes dans tout l'espace, c'est à dire pour toutes les valeurs de λ, μ, ν, elles restent uniformes dans une certaine région de l'espace (λ, μ, ν) pourvu que notre surface S qui représente la surface d'intégration soit toute entière contenue dans cette région.

§ 2. *Conditions d'intégrabilité.*

On sait ce qu'on doit entendre par une intégrale simple:

$$\int (X dx + Y dy + Z dz)$$

prise le long d'une courbe gauche quelconque dans l'espace (x, y, z). On connait également les conditions d'intégrabilité; c'est à dire les conditions pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin. (On suppose bien entendu que X, Y et Z sont des fonctions données de x, y et z). Ces conditions sont:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \qquad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \qquad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Ces résultats s'étendent immédiatement, comme on le sait, au cas d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n fonctions de ces n variables; il est aisé de définir l'intégrale simple:

$$(1) \qquad \int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n).$$

En effet introduisons une variable auxiliaire et posons:

$$(2) \qquad x_1 = \varphi_1(u), \qquad x_2 = \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(u).$$

Ces équations (2) définiront le chemin d'intégration.

Nous ferons varier u depuis u_0 jusqu'à u_1. Nous poserons:

$$x_1^0 = \varphi_1(u_0), \quad \ldots, \quad x_n^0 = \varphi_n(u_0)$$
$$x_1^1 = \varphi_1(u_1), \quad \ldots, \quad x_n^1 = \varphi_n(u_1).$$

Les deux systémes de valeurs $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ définiront les deux points extrêmes de ce chemin d'intégration.

Alors l'intégrale (1) prise le long du chemin d'intégration (2) depuis le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ jusqu'au point $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ ne sera autre chose que l'intégrale définie:

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(X_1 \frac{dx_1}{du} + X_2 \frac{dx_2}{du} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{du} \right) du.$$

Nous cherchons les conditions d'intégrabilité, c'est à dire les conditions pour que cette intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$.

Ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ et elles s'écrivent:

$$\frac{dX_i}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_i}.$$

Passons maintenant au cas des intégrales doubles, et d'abord dans l'espace ordinaire. Soit une intégrale double:

$$\iint (A dy dz + B dx dz + C dx dy)$$

A, B et C étant trois fonctions de x, y, z.

On sait ce qu'on doit entendre par là. La surface d'intégration peut n'être pas fermée, mais on peut toujours convenir de regarder l'un des côtés de la surface comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur.

Soient alors $d\omega$ un élément de cette surface et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dirigée vers l'extérieur.

L'intégrale sera alors:

$$\int (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\omega$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface.

On peut également la définir comme il suit, ce qui revient au même:

Exprimons x, y et z en fonctions de deux variables auxiliaires u et v

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v)$$

Ces équations définiront la surface d'intégration. L'intégrale ne sera alors autre chose que l'intégrale double ordinaire

$$\iint \left[A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + B \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + C \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv.$$

Nous désignons suivant la coutume par la notation $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

La condition d'intégrabilité (c'est à dire la condition pour que l'intégrale prise le long d'une surface fermée quelconque soit nulle) s'écrit alors:

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0.$$

Tous ces points sont trop connus pour que j'y insiste davantage.

Passons maintenant au cas général.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes. Désignons maintenant par la notation:

$$(X_i, X_k)$$

diverses fonctions données de ces n variables. Nous supposerons que l'on a:

$$(X_i, X_i) = 0, \qquad (X_k, X_i) = -(X_i, X_k). \tag{3}$$

Nous allons envisager l'intégrale double:

$$J = \iint \Sigma (X_i, X_k) dx_i dx_k$$

où l'on fait entrer sous le signe Σ les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons de deux indices i et k.

Pour la définir, imaginons qu'on introduise deux variables auxiliaires u et v de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(u, v). \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{4}$$

Ces équations (4) définiront la surface d'intégration. Nous donnerons à u et à v toutes les valeurs qui satisfont à une certaine inégalité:

$$\psi(u, v) > 0 \tag{5}$$

de sorte qu'en réalité la surface d'intégration sera complétement définie par les équations (4) d'une part et par l'inégalité (5) d'autre part. L'égalité:

$$\psi(u, v) = 0$$

définira alors la ligne qui servira de limite à la surface d'intégration.

L'intégrale proposée sera alors l'intégrale double ordinaire:

$$J = \iint \sum (X_i, X_k) \frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)} du\, dv$$

qui devra être étendue à toutes les valeurs de u et de v satisfaisant à l'inégalité (5). Quant au signe $\sum$, il s'appliquera aux $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k.

Mais en tenant compte des relations (3), on peut écrire l'intégrale étudiée sous la forme:

$$J = \iint \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv.$$

Il est manifeste que si on permute les variables u et v, l'intégrale change de signe, mais cette opération est tout à fait analogue à ce que serait, dans l'étude des intégrales simples, un changement du sens de l'intégration.

A part ce changement de signe, l'intégrale est indépendante du choix des variables auxiliaires u et v.

Notre intégrale double étant ainsi complétement définie, il faut trouver les conditions d'intégrabilité. Je veux dire, les conditions pour que l'intégrale ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de la courbe qui limite cette surface; de même que les intégrales simples appliquées à des différentielles exactes, ne dépendaient pas du chemin d'intégration, mais seulement des extrémités de ce chemin.

Supposons que l'on remplace les équations (4) par les suivantes:

$$x = \varphi'_i(u, v)$$

la fonction φ'_i étant différente de la fonction φ_i. Alors on changera la surface d'intégration.

Mais supposons en même temps qu'on conserve l'inégalité (5) sans aucun changement, et que l'on ait:

$$\varphi_i'(u, v) = \varphi_i(u, v)$$

toutes les fois que l'on a:

$$\psi'(u, v) = 0.$$

Alors la courbe qui limite la surface d'intégration n'a pas changé.

Si dans ces conditions l'intégrale n'a pas changé, nous dirons que l'expression sous le signe $\iint$ est intégrable.

Imaginons que l'on pose

$$x_i = \varphi_i(u, v, w)$$

en introduisant une troisième variable auxiliaire w. Nous calculerons l'intégrale proposée J en l'étendant à toutes les valeurs de u et de v qui satisfont à l'inégalité (5) et en regardant w comme un paramètre arbitraire.

Je supposerai de plus que pour

$$\psi(u, v) = 0$$

les fonctions φ_i soient indépendantes de w. Alors la surface d'intégration dépendra de w, mais la courbe qui limite cette surface n'en dépendra pas.

J sera une fonction du paramètre w et nous cherchons les conditions pour que cette fonction soit une constante; ce seront les conditions d'intégrabilité.

Nous avons donc à écrire que:

$$\frac{dJ}{dw} = 0.$$

Nous avons:

$$J = \iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv$$

ce qui donne:

$$\frac{dJ}{dw} = \iint \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv$$

$$+ \iint \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{d^2 x_i}{du\, dw} \frac{dx_k}{dv} + \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} \frac{dx_i}{du} \right) du\, dv.$$

La première intégrale double du second membre peut s'écrire:

$$\iint \sum_i \sum_k \sum_h \frac{d(X_i,\ X_k)}{dx_h} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} du\, dv.$$

Cherchons à réduire la seconde. Pour cela, remarquons que l'on a:

$$\int F du = \iint \frac{dF}{dv} du\, dv \tag{6}$$

l'intégrale double étant étendue à toute notre surface d'intégration et l'intégrale simple du premier membre au contour qui limite cette surface et qui est défini par l'équation:

$$\psi(u,\ v) = 0.$$

Faisons dans cette équation:

$$F = (X_i,\ X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw}.$$

Nous avons supposé que les fonctions φ_i, c'est à dire les x_i sont indépendants de w pour $\psi = 0$. On a donc, si ψ est supposé nul

$$\frac{dx_k}{dw} = 0, \qquad F = 0.$$

Il résulte de là que le premier membre de (6) est nul. On doit donc avoir:

$$\iint (X_i,\ X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} du\, dv \tag{7}$$

$$= -\iint (X_i,\ X_k) \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} du\, dv - \iint \frac{d(X_i,\ X_k)}{dv} \frac{dx_k}{dw} \frac{dx_i}{du} du\, dv.$$

On peut écrire une seconde équation analogue à l'équation (6)

$$-\int F dv = \iint \frac{dF}{du} du\, dv \tag{6'}$$

d'où l'on déduit de la même façon:

$$(7') \qquad \iint (X_i,\ X_k) \frac{dx_k}{dv} \frac{d^2 x_i}{du\, dw} du\, dv$$

$$= - \iint (X_i,\ X_k) \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} du\, dv - \iint \frac{d(X_i,\ X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} du\, dv.$$

Remarquons maintenant que:

$$\iint \sum_i \sum_k (X_i,\ X_k) \left(\frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} + \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} \right) du\, dv = 0.$$

En effet si on envisage l'expression suivante:

$$H = (X_i,\ X_k) \left(\frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} + \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} \right)$$

on voit qu'elle se change en $-H$ quand on permute les indices i et k.

Dans l'emploi des relations (7) et (7′) nous pourrons donc laisser de côté le premier terme du second membre. Il vient donc pour l'expression de $\frac{dJ}{dw}$

$$\iint \sum_i \sum_k \left[\frac{d(X_i,\ X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} - \frac{d(X_i,\ X_k)}{dv} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw} - \frac{d(X_i,\ X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} \right] du\, dv.$$

Observons maintenant que:

$$\frac{d(X_i,\ X_k)}{du} = \sum_h \frac{d(X_i,\ X_k)}{dx_h} \frac{dx_h}{du}$$

et que l'on a deux formules analogues pour:

$$\frac{d(X_i,\ X_k)}{dv} \qquad \text{et} \qquad \frac{d(X_i,\ X_k)}{dw}.$$

Ceci nous permet de transformer l'expression de $\frac{dJ}{dw}$ et de l'écrire:

$$\iint \sum_h \sum_i \sum_k \frac{d(X_i,\ X_k)}{dx_h} \left| \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} - \frac{dx_i}{du} \frac{dx_h}{dv} \frac{dx_k}{dw} - \frac{dx_h}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_i}{dw} \right| du\, dv.$$

Transformons-la encore en laissant de côté les termes où les indices i et k sont égaux entre eux, puisque nous savons que ces termes sont nuls. Réunissons de plus les termes en (X_i, X_k) et (X_k, X_i) en remarquant que

$$(X_i, X_k) = -(X_k, X_i).$$

Cela donnera

$$\iint \sum \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)} du\, dv.$$

Le signe Σ porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on convient:

1° de laisser de côté les combinaisons où $i = k$.

2° de ne pas regarder comme différentes les deux combinaisons (i, k, h) et (k, i, h).

Nous pouvons écrire aussi:

$$\frac{dJ}{dw} = \iint \sum \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k}\right] \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)} du\, dv.$$

Le signe Σ change alors de signification. Il porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on ne considère pas comme différentes deux combinaisons qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres i, k, h.

Il est clair d'ailleurs qu'on peut laisser de côté les combinaisons où deux des lettres i, k, h sont égales entre elles, parce qu'elles donneraient un résultat nul.

L'expression de $\frac{dJ}{dw}$ doit être nulle quelles que soient les fonctions φ_i. Cela ne peut avoir lieu que si l'on a:

$$(8) \qquad \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} = 0.$$

Telles sont les conditions d'intégrabilité. Il faut prendre pour le système des trois nombres (i, k, h) toutes les combinaisons possibles, en excluant celles où deux des lettres seraient identiques et en ne regardant pas comme distinctes celles qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres. Les conditions d'intégrabilité sont donc au nombre de:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Considérons en particulier le cas de $n = 4$ et envisageons l'intégrale double:

$$\iint \Big[(X, Y)dxdy + (X, Z)dxdz + (X, T)dxdt$$
$$+ (Y, Z)dydz + (Y, T)dydt + (Z, T)dzdt\Big].$$

Les conditions d'intégrabilité seront:

$$\frac{d(X, Y)}{dz} + \frac{d(Y, Z)}{dx} + \frac{d(Z, X)}{dy} = 0$$

$$\frac{d(X, Y)}{dt} + \frac{d(Y, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dy} = 0$$

$$\frac{d(X, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dz} = 0$$

$$\frac{d(Y, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dy} + \frac{d(T, Y)}{dz} = 0.$$

Si l'on compare les conditions d'intégrabilité relatives aux intégrales simples

$$(9) \qquad \frac{dX_i}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_i} = 0$$

avec les conditions (8) relatives aux intégrales doubles, il est impossible de n'être pas frappé d'un fait remarquable.

Dans les formules (9) on a alternativement le signe + et le signe —; dans les formules (8) on n'a que le signe +.

Qu'arrive-t-il si l'on passe aux intégrales d'ordre supérieur?

On trouvera des conditions tout à fait analogues aux conditions (8) et (9) et l'on rencontrera encore le fait que je viens de signaler. Pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre pair, tous les termes seront précédés du signe +; pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre impair, les termes seront alternativement précédés des signes + et —.

Soit par exemple l'intégrale triple:

$$\iiint \Sigma (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma$$

l'intégrale étant définie comme plus haut, et les fonctions $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ étant des fonctions analogues aux fonctions (X_i, X_k) et qui changent de

signe quand on permute deux des indices α, β, γ. Les conditions d'intégrabilité s'écriront alors:

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} - \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\alpha)}{dx_\beta} - \frac{d(X_\delta, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} = 0$$

avec alternance des signes $+$ et $-$.

Soit au contraire l'intégrale quadruple:

$$\iiiint \Sigma(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta) dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma dx_\delta.$$

Les conditions d'intégrabilité s'écriront:

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\varepsilon} + \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha)}{dx_\beta}$$
$$+ \frac{d(X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} + \frac{d(X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} = 0$$

avec le signe $+$ partout.

§ 3. *Théorème fondamental.*

Reprenons le mode de représentation du § 1. Soient donc λ, μ, ν les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et une surface ou portion de surface S. Posons ensuite:

$$(1) \quad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

les φ étant des fonctions rationnelles.

Envisageons une fonction des deux variables complexes

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

que j'appellerai

$$F(\xi, \eta)$$

ou bien encore

$$P + iQ,$$

en séparant les parties réelle et imaginaire. On aura alors:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dP}{dx} &= +\frac{dQ}{dy}, & \frac{dP}{dz} &= \frac{dQ}{dt}, \\
\frac{dP}{dy} &= -\frac{dQ}{dx}, & \frac{dP}{dt} &= -\frac{dQ}{dz}.
\end{aligned}
$$

Il s'agit maintenant de définir ce qu'on doit entendre par l'intégrale double:

$$\iint F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

prise le long de la surface d'intégration définie par la surface S et par les équations fondamentales (1).

Il importe d'abord de définir le sens de l'intégration. Pour cela imaginons un observateur O, ayant les pieds sur la surface S et la tête dirigée soit vers l'extérieur de cette surface, soit vers l'intérieur. C'est la position de cet observateur O qui définira le sens d'intégration. Nous dirons que ce sens est positif si l'observateur a la tête vers l'extérieur et négatif dans le cas contraire.

Si la surface S n'est pas fermée, il n'y a plus à proprement parler d'extérieur et d'intérieur; mais nous pouvons toujours convenir de regarder l'un des côtés comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur. (Si la surface S n'avait qu'un seul côté, l'intégrale serait nulle.)

Envisageons maintenant l'expression:

$$\iint (P + iQ)(dx + idy)(dz + idt).$$

Cette expression n'a absolument aucune signification par elle même et ne pourra avoir que celle que nous conviendrons de lui donner. Effectuons néanmoins le produit sous le signe $\iint$ d'après les règles ordinaires du calcul; ce ne sera là qu'une opération purement mécanique et destinée à nous servir de règle mnémonique. Il viendra:

$$\iint \Big[(P + iQ)dxdz + (iP - Q)dxdt + (iP - Q)dydz - (P + iQ)dydt\Big].$$

Imaginons maintenant qu'on puisse trouver deux variables auxiliaires u et v, telles qu'en tous les points de la surface S les trois coordonnées λ, μ, ν soient des fonctions holomorphes de u et de v.

Alors l'intégrale cherchée sera l'intégrale double ordinaire:

$$\iint \left| (P + iQ)\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q)\frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} \right.$$

$$\left. + (iP - Q)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - (P + iQ)\frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

étendue à tous les systèmes de valeurs de u et de v qui correspondent aux différents points de la surface S.

Si l'on ne pouvait trouver deux variables u et v satisfaisant à ces conditions, on décomposerait la surface S en plusieurs régions et (à la condition que ces régions soient assez petites) on pourrait toujours trouver dans chacune d'elles, deux variables u et v telles que λ, μ, ν soient fonctions holomorphes de u et de v, en tous les points de la région.

L'ordre des deux variables u et v n'est pas indifférent. Il est clair en effet que l'intégrale change de signe quand on permute ces deux variables. Voici donc la convention que nous ferons: imaginons que u et v représentent les coordonnées d'un point dans un plan. Imaginons que le point λ, μ, ν décrive sur la surface S un contour fermé très petit C autour des pieds de l'observateur O et que cet observateur voie ce point décrire ce contour C dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Le point correspondant (u, v) décrira dans son plan un autre contour fermé C''. Il faudra que ce second contour C'', soit décrit comme le premier dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (en supposant que les axes des u et des v positifs soient disposés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y positifs).

Notre intégrale double est ainsi complétement définie et elle est analogue à celles que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent. On a d'ailleurs:

$$(X, Y) = (Z, T) = 0$$

$$(X, Z) = (T, Y) = P + iQ$$

$$(X, T) = (Y, Z) = iP - Q.$$

Les quatre conditions d'intégrabilité s'écrivent alors:

$$\frac{d(iP-Q)}{dx} - \frac{d(P+iQ)}{dy} = 0$$

$$-\frac{d(P+iQ)}{dx} - \frac{d(iP-Q)}{dy} = 0$$

$$\frac{d(P+iQ)}{dt} - \frac{d(iP-Q)}{dz} = 0$$

$$\frac{d(iP-Q)}{dt} + \frac{d(P+iQ)}{dz} = 0.$$

Elles seront donc remplies en vertu des relations (2).

Il est aisé de tirer de là diverses conséquences.

Imaginons d'abord deux portions de surfaces S et S' limitées par un même contour C et que ces deux portions de surfaces soient situées toutes deux dans l'espace (λ, μ, ν). Nous supposerons d'ailleurs que les deux surfaces d'intégration sont définies l'une par S, l'autre par S', mais toutes deux par les mêmes équations fondamentales:

(1) $x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu).$

Si la surface S peut, par une déformation continue, arriver à se confondre avec S', et si dans cette déformation continue il n'arrive à aucun moment que la fonction $F = P + iQ$ devienne infinie ou discontinue en un point de la surface d'intégration, à ces conditions, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Considérons maintenant les surfaces singulières, c'est à dire l'ensemble des points où la fonction F devient infinie ou discontinue. Soient:

$$\psi_1(x, y, z, t) \quad \psi_2(x, y, z, t) = 0$$

les équations de ces surfaces.

Remplaçons dans ψ_1 et ψ_2, x, y, z, t par φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4, les deux équations des surfaces singulières se réduiront à deux relations:

$$f_1(\lambda, \mu, \nu) = f_2(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

entre λ, μ et ν. Ces deux équations définirent certaines courbes appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et que j'appellerai courbes singulières, parce

qu'elles sont le lieu des points qui appartiennent à l'espace (λ, μ, ν) et où la fonction sous le signe $\iint$ devient infinie ou discontinue.

Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent de la façon suivante:

Les deux portions de surface S et S' étant limitées au même contour C diviseront l'espace (λ, μ, ν) en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure. Si dans cette région intérieure, il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Si la surface S est fermée, elle divisera l'espace (λ, μ, ν) en deux régions; si à l'intérieur de S il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera nulle.

Si la surface S' appartenant comme S à l'espace (λ, μ, ν) est fermée comme S et tout entière intérieure à S, et si dans l'espace compris entre S et S', il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S est égale à l'intégrale prise le long de S'.

Si deux surfaces S et S', toutes deux fermées et appartenant toutes deux à l'espace (λ, μ, ν) contiennent à leur intérieur les mêmes courbes singulières et les mêmes portions de courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Il faut toutefois avoir soin de prendre les deux intégrales dans le même sens. Nous avons défini le sens d'intégration à l'aide de l'observateur O. Nous supposerons donc que cet observateur a la même position par rapport aux deux surfaces S et S'. S'il a la tête vers l'extérieur de la surface S, il devra avoir aussi la tête vers l'extérieur de la surface S' et inversement.

Il peut arriver que deux surfaces fermées S et S' tout en n'appartenant pas au même espace (λ, μ, ν) contiennent néanmoins à leur intérieur une même courbe singulière.

Soient en effet:

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad t = f_2(x, y, z)$$

les équations d'une courbe singulière C.

Cette courbe C appartiendra à la fois à l'espace (λ, μ, ν) défini par les équations fondamentales:

$$x = \lambda, \qquad y = \mu, \qquad z = \nu, \qquad t = f_2(\lambda, \mu, \nu)$$

et à l'espace (λ', μ', ν') défini par les équations:

$$x = \lambda', \qquad y = \mu', \qquad z = \nu', \qquad t = f_1(\lambda', \mu', \nu') + f_2(\lambda', \mu', \nu').$$

Il pourra se faire alors qu'une surface fermée S appartenant à l'espace (λ, μ, ν) contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre; et qu'une autre surface fermée S' appartenant à l'espace (λ', μ', ν') contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre.

L'intégrale prise le long de S est alors égale à l'intégrale prise le long de S'. Il faudrait toutefois pour s'assurer que l'intégration a bien lieu dans le même sens, une discussion délicate que je réserverai pour le paragraphe suivant. Je me contenterai donc pour le moment de dire que les deux intégrales sont égales, ou égales et de signe contraire.

On peut résumer tout ce qui précède en disant que l'intégrale prise le long d'une surface fermée S ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de cette surface.

§ 4. *Résidus des fonctions rationnelles.*

Soit une fonction rationnelle

$$F(\xi, \eta).$$

Ecrivons-la en mettant en évidence le numérateur et le dénominateur et en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles. Supposons pour fixer les idées que ce dénominateur admette deux semblables facteurs.

Soit donc:

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta) R(\xi, \eta)}$$

P, Q et R étant trois polynômes entiers dont les deux derniers sont irréductibles

Considérons un espace (λ, μ, ν) défini par les quatre équations:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et dans cet espace une surface fermée S.

Il s'agit de calculer l'intégrale double:

$$\iint_S F(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

prise le long de S, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur.

Cette intégrale dépend comme nous l'avons vu des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de la surface S.

Les courbes singulières de l'espace (λ, μ, ν) sont de deux sortes:

Les unes ont pour équations:

$$Q\left|(\varphi_1(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \varphi_3(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_4(\lambda, \mu, \nu)\right| = 0$$

les autres ont pour équations:

$$R[\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4] = 0.$$

D'ailleurs, celles de ces courbes qui seront contenues tout entières à l'intérieur de la surface fermée S, devront évidemment être des courbes fermées.

Supposons que la surface S contienne à son intérieur plusieurs courbes singulières fermées, par exemple deux que j'appellerai C et C'. Nous pourrons toujours construire dans l'espace (λ, μ, ν) deux surfaces fermées Σ et Σ' situées toutes deux à l'intérieur de S et contenant à leur intérieur, la première C et C seulement, la seconde C' et C' seulement; l'intégrale prise le long de S sera alors la somme de l'intégrale prise le long de Σ et de l'intégrale prise le long de Σ', l'observateur O qui définit le sens d'intégration demeurant toujours dirigé vers l'extérieur.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où la surface S ne contient à son intérieur qu'une seule courbe singulière C.

Toutes les surfaces S renfermant la courbe C conduiront à la même intégrale. Il n'est pas nécessaire pour cela que ces diverses surfaces S appartiennent au même espace (λ, μ, ν).

Construisons donc un espace (λ', μ', ν') particulier contenant la courbe C et, dans cet espace, une surface fermée Σ renfermant cette courbe. Nous choisirons cet espace et cette surface de telle sorte que l'intégration soit facile et l'intégrale cherchée, c'est à dire l'intégrale prise le long de S, sera égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ.

Nous pourrons toujours mettre les équations de la courbe C sous la forme:

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega)$$

les ψ étant des fonctions périodiques du paramètre ω, puisque cette courbe est fermée. Nous supposerons que la période est égale à 2π.

Cela posé nous introduirons deux autres paramètres ρ et φ et nous écrirons:

$$\lambda' = \cos\omega(1 + \rho\cos\varphi), \qquad \mu' = \sin\omega(1 + \rho\cos\varphi), \qquad \nu' = \rho\sin\varphi.$$

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega) + \rho\cos\varphi,$$

$$t = \psi_4(\omega) + \rho\sin\varphi.$$

Ainsi x, y, z et t sont définis en fonctions de ω, ρ et φ et par conséquent en fonctions de λ', μ', ν'. Mais il faut faire ici une remarque: x, y, z et t sont des fonctions uniformes de ω, ρ et φ, mais non de λ', μ', ν'. Toutefois si l'on convient que ρ devra toujours être compris entre 0 et 1, à un système de valeurs λ', μ', ν', correspondra un seul système de valeurs de ρ, $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et un seul système de valeurs de x, y, z, t; grâce à cette restriction x, y, z et t deviennent donc des fonctions uniformes de λ', μ', ν'.

A un point de l'espace (λ', μ', ν') satisfaisant à la condition $\rho < 1$, c'est à dire situé à l'intérieur d'un certain tore, correspond donc un point et un seul de l'hyperespace.

Dans ce mode de représentation, la courbe C est représentée par le cercle $(\rho = 0)$

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \qquad \nu' = 0.$$

Nous prendrons pour la surface Σ le tore dont l'équation est:

$$\rho = \rho_0, \qquad 0 < \rho_0 < 1.$$

Ce tore enveloppe manifestement la courbe C. Nous allons voir que le calcul de l'intégrale

$$\iint F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

le long de cette surface Σ est particulièrement simple.

Décomposons en effet l'intégration en deux parties; intégrons d'abord par rapport à η, en regardant ξ comme un paramètre arbitraire. Nous avons:

$$z = \psi_3(\omega) + \rho_0 \cos\varphi, \qquad t = \psi_4(\omega) + \rho_0 \sin\varphi.$$

Si ξ est regardé un instant comme une constante, ω sera aussi une constante; il en est de même de ρ_0, φ étant la seule variable. On a alors:

$$\eta = \psi_3 + i\psi_4 + \rho_0 e^{i\varphi}$$

ce qui montre que le point η décrit dans le plan des η un cercle de rayon ρ_0 ayant pour centre le point $\psi_3 + i\psi_4$. L'intégrale simple

$$I = \int F(\xi, \eta) d\eta$$

est alors égale à $2i\pi$ multipliée par le résidu de la fonction $F(\xi, \eta)$ (regardée comme fonction de η seulement) par rapport au point $\psi_3 + i\psi_4$.

Imaginons pour fixer les idées que le long de la courbe C ce soit le premier facteur $Q(\xi, \eta)$ du dénominateur qui s'annule de telle sorte que

$$Q(\psi_1 + i\psi_2, \psi_3 + i\psi_4) = 0.$$

Le résidu en question est alors facile à calculer et on trouve pour l'intégrale simple:

$$I = \frac{2i\pi P(\xi, \eta)}{\frac{dQ}{d\eta} R(\xi, \eta)}$$

où

$$\xi = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega), \qquad \eta = \psi_3(\omega) + i\psi_4(\omega)$$

et où par conséquent

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à ξ en faisant varier ω de

o à 2π, c'est à dire en suivant toute la courbe C. On est donc ramené à chercher l'intégrale simple:

$$J = \int \frac{2i\pi P\,d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta}}$$

le long de la courbe C, η étant supposé lié à ξ par la relation algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Cette intégrale est donc une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $Q = 0$.

Il suffit d'un peu d'attention pour vérifier que si l'on veut obtenir l'intégrale le long de Σ, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur, il faut en prenant l'intégrale J, suivre la courbe C dans le sens des ω croissants.

L'intégrale prise le long de S sera donc aussi égale à J ou à $-J$; car elle est égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ. Il reste à déterminer le signe.

Imaginons que l'on fasse varier d'une manière continue les quatre relations fondamentales:

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et qu'en même temps on fasse varier également d'une manière continue la surface S, mais de telle sorte que la courbe C reste toujours dans l'espace (λ, μ, ν) et à l'intérieur de S.

L'intégrale ne variera pas tant que la surface S ne contiendra pas d'autre courbe singulière que C.

Cela posé envisageons les douze dérivées partielles de x, y, z, t par rapport à λ, μ, ν

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{d\varphi_2}{d\lambda}, \quad \ldots$$

et d'autre part les quatre dérivées de x, y, z, t par rapport à ω, en supposant que le point x, y, z, t décrive la courbe C:

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{d\psi_1}{d\omega}, \qquad \frac{dy}{d\omega} = \frac{d\psi_2}{d\omega}, \quad \ldots$$

Envisageons ensuite le déterminant:

$$\begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ -\frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Je dis que si Δ s'annule en un point quelconque de C, il y aura à l'intérieur de S une autre courbe singulière que C (en négligeant certains cas exceptionnels qu'il serait d'ailleurs inutile d'envisager ici).

En effet, les courbes singulières ont pour équations:

$$Q(\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_3 + i\varphi_4) = 0.$$

Pour qu'une courbe gauche possède un point double, il suffit en général que le calcul des cosinus directeurs de la tangente conduise à une indétermination. Cherchons donc à déterminer la tangente à C; l'équation des courbes singulières:

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

peut se résoudre par rapport à η, d'où:

$$\eta = f(\xi)$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A + Bi$$

A et B étant les parties réelle et imaginaire de la dérivée de $f(\xi)$.

Cela donne:

$$(1) \qquad \begin{aligned} dz &= A dx - B dy \\ dt &= B dx + A dy. \end{aligned}$$

Nous devons chercher la tangente à C et pour cela, il faut déterminer les rapports des quatre différentielles dx, dy, dz, dt. Pour cela nous avons l'équation:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} dx & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ dy & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ dz & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ dt & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0$$

qui jointe aux équations (1) suffit en général pour déterminer dx, dy, dz, dt. Mais comme dx, dy, dz, dt sont des différentielles se rapportant à C, elles doivent être proportionnelles à

$$\frac{dx}{d\omega}, \frac{dy}{d\omega}, \frac{dz}{d\omega}, \frac{dt}{d\omega}$$

de sorte qu'on a toujours:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\lambda} & \frac{dx}{d\mu} & \frac{dx}{d\nu} \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\lambda} & \frac{dy}{d\mu} & \frac{dy}{d\nu} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\lambda} & \frac{dz}{d\mu} & \frac{dz}{d\nu} \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\lambda} & \frac{dt}{d\mu} & \frac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

On a toujours d'ailleurs:

$$\frac{dz}{d\omega} = A\frac{dx}{d\omega} - B\frac{dy}{d\omega}$$

$$\frac{dt}{d\omega} = A\frac{dy}{d\omega} + B\frac{dx}{d\omega}$$

ce qui montre que les différentielles

$$dx = \varepsilon \frac{dy}{d\omega}, \qquad dy = \varepsilon \frac{dx}{d\omega}, \qquad dz = \varepsilon \frac{dt}{d\omega}, \qquad dt = \varepsilon \frac{dz}{d\omega}$$

(où ε est une quantité infiniment petite quelconque) satisfont toujours aux équations (1).

Si de plus on a $\Delta = 0$, elles satisferont également à l'équation (2). Mais alors ces équations (1) et (2) ne suffiront plus pour déterminer les quatre différentielles. La courbe C aura donc un point double.

Donc si en un point de la courbe C, Δ s'annule, ce point est un point double; ou bien encore nous pouvons dire que la surface S contient outre la courbe C une autre courbe singulière qui vient couper C. Une discussion plus approfondie montrerait qu'il y a des cas d'exception, mais que ces cas ne se présenteront pas si Δ s'annule en changeant de signe.

En conséquence, si la surface S ne contient pas d'autre courbe singulière que C, le déterminant Δ conservera le même signe tout le long de C. Imaginons maintenant que l'on fasse varier S et l'espace (λ, μ, ν) d'une façon continue comme nous l'avons dit plus haut. Tant que Δ ne changera pas de signe, l'intégrale ne variera pas.

Donc le signe de l'intégrale dépend du signe de Δ.

Voyons quel est ce signe pour l'intégrale prise le long de Σ'.

On a alors:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi} \\ -\frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\rho} & \frac{dt}{d\varphi} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)}}$$

Il vient ensuite

$$\frac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)} = -\rho(1 + \rho\cos\varphi) < 0;$$

Δ est donc de même signe que:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\omega} & -\frac{dy}{d\omega} & 0 & 0 \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & 0 & 0 \\ \frac{dz}{d\omega} & -\frac{dt}{d\omega} & \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}$$

c'est à dire positif.

En résumé:

L'intégrale double prise le long de S est égale à l'intégrale simple abélienne:

$$J = \int \frac{2i\pi P\,d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta}}$$

prise le long de la courbe C, et on doit parcourir cette courbe dans le sens des ω croissants si Δ est positif et des ω décroissants si Δ est négatif.

Ainsi les périodes de l'intégrale double:

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne:

$$J = \int \frac{2i\pi P\,d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $Q = 0$ et aussi que celles de l'intégrale simple abélienne

$$J' = \int \frac{2i\pi P\,d\xi}{Q\frac{dR}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $R = 0$.

Nous savons qu'une intégrale abélienne possède deux sortes de périodes, les périodes cycliques et les périodes polaires. Les intégrales de 1ère et de 2de espèces ne présentent que des périodes cycliques.

Etudions d'abord les périodes cycliques. Si la courbe $Q = 0$ est de genre q, l'intégrale J admettra $2q$ périodes cycliques. Si la courbe $R = 0$ est de genre r, l'intégrale J' admettra $2r$ périodes cycliques. L'intégrale double aura donc en tout $2q + 2r$ périodes cycliques.

Quelle est la condition pour que cette intégrale n'ait que des périodes cycliques. Il faut que les intégrales J et J' soient de 1ère ou de 2me espèce. Pour cela il faut et il suffit que la courbe $P = 0$ passe par tous les points doubles des deux courbes $R = 0$, $Q = 0$, ainsi que par les points d'intersection de ces deux courbes, à l'exception toutefois des points où ces deux courbes se touchent.

Passons maintenant aux périodes polaires. Les pôles de l'intégrale J sont les points d'intersection des deux courbes:

$$R = 0, \qquad Q = 0$$

et les points doubles de la courbe

$$Q = 0.$$

Pour les premiers, le résidu est facile à calculer. On trouve que la période est égale à:

$$-4\pi^2 \frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}\frac{dR}{d\xi} - \frac{dQ}{d\xi}\frac{dR}{d\eta}}$$

où ξ, η sont remplacés par les coordonnées du point d'intersection considéré.

Si l'on considère ce même point d'intersection comme un pôle de l'intégrale J', on est conduit au même résultat, au signe près.

Pour les points doubles de $Q = 0$, on trouve:

$$-4\pi^2 \frac{P}{R\sqrt{\left(\frac{d^2Q}{d\xi d\eta}\right)^2 - \frac{d^2Q}{d\xi^2}\frac{d^2Q}{d\eta^2}}}$$

où ξ et η sont remplacés par les coordonnées du point double.

En envisageant l'intégrale J' et les points doubles de $R = 0$, on serait conduit à des périodes de la forme:

$$-4\pi^2 \frac{P}{Q\sqrt{\left(\frac{d^2R}{d\xi d\eta}\right)^2 - \frac{d^2R}{d\xi^2}\frac{d^2R}{d\eta^2}}}.$$

En résumé si les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ sont respectivement d'ordre m et n avec h et k points doubles, on aura:

$$q = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h, \qquad r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k$$

et l'intégrale double admettra les périodes suivantes:

1° les

$$2q + 2r = (m-1)(m-2) + (n-1)(n-2) - 2(h+k)$$

périodes cycliques.

2° les mn périodes relatives aux mn points d'intersection des deux courbes.

3° les h périodes relatives aux h points doubles de $Q = 0$.

4° les k périodes relatives aux k points doubles de $R = 0$.

Il y aura donc en tout

$$m^2 + mn + n^2 - 3(m+n) + 4 - h - k$$

périodes.

Si l'on considère les deux courbes $Q = 0$, $R = 0$ comme n'en formant qu'une seule qui a pour équation:

$$QR = 0$$

elle sera de degré $p = m + n$ et aura:

$$d = mn + h + k$$

points doubles.

Le nombre des périodes auquel on est conduit est alors:

$$p^2 - 3p + 4 - d.$$

Si on avait eu au dénominateur un polynôme indécomposable Q, que ce polynôme eût été de degré p, et que la courbe:

$$Q = 0$$

eût eu d points doubles, on aurait trouvé pour le nombre des périodes, en appliquant les formules précédentes:

$$p^2 - 3p + 2 - d.$$

Voici donc ce que nous pourrons dire en général:

Soit p le degré du dénominateur, ν le nombre de ses facteurs irréductibles, d le nombre des points doubles. Le nombre des périodes sera:

$$p^2 - 3p + 2\nu - d.$$

Ce nombre peut se réduire dans certains cas particuliers.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que du cas où tous les facteurs du dénominateur sont distincts. Il nous reste à examiner ceux où deux ou plusieurs de ces facteurs se confondent, ce qui arrivera par exemple si le dénominateur est un carré parfait.

Il faudrait donc étudier les périodes de l'intégrale double:

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^\alpha R^\beta S^\gamma}$$

où Q, R et S sont des polynômes entiers irréductibles, et où α, β, γ sont des exposants entiers.

Il nous suffira, pour faire comprendre la marche à suivre, de considérer le cas particulier de l'intégrale

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}.$$

Les courbes singulières ont alors pour équations:

$$Q = 0.$$

Pour calculer l'intégrale, il faut employer le procédé de la différentiation sous le signe $\iint$.

Considérons l'intégrale double:

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q-\alpha}.$$

Nous avons vu qu'elle est égale à l'intégrale simple abélienne:

$$J = 2i\pi \int \frac{P\,d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique:

$$Q = \alpha.$$

C'est une fonction de α dont la dérivée par rapport à α est egale à

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(Q-\alpha)^2}.$$

Différentions de même l'intégrale simple J par rapport à α; nous trouvons:

$$\frac{d}{d\alpha}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right|\frac{d\eta}{d\alpha}.$$

On a:

$$\frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^2}.$$

De plus η nous est donné en fonction de ξ et de α par l'égalité:

$$Q = \alpha.$$

En la différentiant par rapport à α on trouve:

$$\frac{dQ}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} = 1.$$

Il vient donc:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 2i\pi \int \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3} d\xi.$$

D'où l'on conclut que les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne:

$$2i\pi \int \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3} d\xi$$

relative à la courbe algébrique $Q = 0$.

Un cas particulier intéressant est celui des périodes polaires. Soit par exemple à calculer celle des périodes polaires de l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ^2}$$

qui se rapporte au point d'intersection:

$$\xi = a, \qquad \eta = b$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = 0.$$

On pourrait faire le calcul à l'aide de la formule précédente, mais il est plus simple d'opérer comme il suit:

Considérons les périodes polaires de l'intégrale:

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{R(Q-\alpha)}$$

et en particulier celle qui se rapporte au point d'intersection:

$$\xi = a', \qquad \eta = b'$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = \alpha.$$

Je suppose, bien entendu, que a' et b' se réduisent à a et b quand α s'annule. Cette période est égale à:

$$-4\pi^2 \frac{P(a', b')}{\Delta(a', b')}$$

Δ désignant le déterminant fonctionnel de R et de Q.

Nous n'avons plus qu'à différentier cette expression par rapport à α.

Appelons φ la fonction

$$-4\pi^2 \frac{P}{\Delta}.$$

Appelons $D(\xi, \eta)$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}.$$

Nous trouverons que la période de l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ^2}$$

est égale à

$$+\frac{D(a, b)}{\Delta(a, b)}.$$

On voit aisément comment on opérerait si l'exposant de Q était plus grand que 2.

En particulier, l'intégrale double

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(\xi - a)^n(\eta - b)^p}$$

n'a qu'une seule période qui a pour expression

$$\frac{4\pi^2 P'(a, b)}{(n-1)(p-1)}$$

où l'on a posé:

$$P'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2}P}{d^{n-1}\xi\, d^{p-1}\eta}.$$

De même l'intégrale

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^n(\gamma\xi + \delta\eta)^p}$$

a une seule période dont l'expression est:

$$\frac{4\pi^2 P'(0, 0)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^{n+p}\,|\underline{n-1}\,|\underline{p-1}}.$$

Pour définir ici la fonction $P'(\xi, \eta)$ qui n'a plus la même signification que plus haut, nous supposerons qu'on ait changé de variables en faisant:

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta$$

$$\eta' = \gamma\xi + \delta\eta$$

et nous poserons:

$$P'(\xi, \eta) = \frac{d^{n+p-2}P}{d^{n-1}\xi\, d^{p-1}\eta}.$$

§ 5. *Méthode de M. Stieltjes.*

Monsieur Stieltjes a découvert il y a quelques années une remarquable généralisation de la série de Lagrange. Considérant l'intégrale double:

$$\iint \frac{P\,d\xi\,d\eta}{QR}$$

qui a fait l'objet du paragraphe précédent, et l'intégrant le long d'une surface particulière, il découvrait l'une de ses périodes, qui a pour expression:

(1) $$\frac{4\pi^2 P}{\dfrac{dQ}{d\xi}\dfrac{dR}{d\eta} - \dfrac{dQ}{d\eta}\dfrac{dR}{d\xi}}$$

ξ et η étant remplacées par les coordonnées d'un des points d'intersection des deux courbes:

$$Q = 0, \qquad R = 0.$$

On n'a plus qu'à faire dans cette formule:

$$(2)\qquad \begin{aligned} Q &= \xi - hf(\xi, \eta) \\ R &= \eta - k\varphi(\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$P = F(\xi, \eta)\left[1 - h\frac{df}{d\xi} - k\frac{d\varphi}{d\eta} + hk\left(\frac{df}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{df}{d\eta}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\right]$$

(h et k étant deux quantités très petites, f, φ et F trois polynômes quelconques en ξ, η) pour retomber sur une généralisation de la formule de Lagrange.

M. Stieltjes ne publia pas toutefois sa découverte et se borna à la communiquer à quelques amis; mais de graves objections lui furent faites et le déterminèrent à ne pas publier ses résultats.

Etait-il certain que la fonction sous le signe $\iint$ ne devenait pas infinie en quelques points de la surface d'intégration?

Comment se faisait-il, puisque rien ne distingue Q de R, qu'on changeait le signe de l'expression (1), en permutant Q et R?

La discussion du paragraphe précédent, nous met aujourd'hui en mesure de répondre à toutes ces objections.

Commençons par introduire les quatre relations fondamentales qui définissent l'espace (λ, μ, ν); nous écrirons:

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \qquad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \qquad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1}$$

où l'on a posé pour abréger

$$k^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Les deux équations

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = 0$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) le cercle

$$(3)\qquad \lambda = 0, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et l'axe des λ

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0.$$

Si h et k sont assez petits les deux équations:

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad R = 0$$

ou ce qui revient au même:

$$\xi = hf \quad \text{et} \quad \eta = k\varphi$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) une courbe fermée très peu différente du cercle (3) et une autre courbe fermée se rapprochant beaucoup de l'axe des λ dans tous les points situés à distance finie.

Il importe de remarquer que ces deux courbes sont entrelacées l'une dans l'autre. Je veux dire par là qu'il serait impossible de construire une portion de surface simplement connexe limitée à l'une des deux courbes fermées et qui ne coupe pas l'autre courbe fermée.

La surface d'intégration considérée par M. Stieltjes est définie comme il suit: on fait décrire à ξ dans son plan, un cercle ayant pour centre l'origine, pendant que η décrit de son côté dans son plan un autre cercle ayant aussi pour centre l'origine.

Les équations de la surface d'intégration sont donc:

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2, \qquad z^2 + t^2 = \rho_2^2.$$

Si nous revenons à notre mode de représentation, il faut que nous supposions:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2.$$

La surface d'intégration sera alors représentée dans l'espace (λ, μ, ν) par la surface:

$$(k^2 + 1)^2\rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Cette surface est un tore; le cercle

$$\xi = 0$$

et par conséquent si h est très petit, la courbe fermée

$$\xi = hf$$

se trouvent entièrement à l'intérieur de ce tore.

Au contraire l'axe des λ

$$\eta = 0$$

et par conséquent si k est très petit, la courbe fermée

$$\eta = k\varphi$$

se trouvent entièrement à l'extérieur de ce tore.

On voit tout de suite que la première objection faite à M. Stieltjes est levée, puisque le tore ne coupe en aucun point les courbes singulières.

Nous définirons le sens d'intégration comme nous l'avons fait jusqu'ici, par un observateur placé sur le tore; je supposerai par exemple que cet observateur est dirigé vers l'extérieur.

La seule courbe singulière située à l'intérieur de la surface d'intégration est la courbe:

$$\xi = hf.$$

L'intégrale cherchée se ramène donc à une intégrale abélienne simple relative à cette courbe. Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître, en appliquant les règles du paragraphe précédent, que cette période est une période polaire et qu'elle est égale à:

$$\frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{dQ}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}}.$$

Il nous est facile de voir maintenant comment tombe d'elle-même la seconde objection qui avait été opposée à M. Stieltjes. Il n'est pas vrai que rien ne distingue Q de R. La courbe $Q = 0$ ou $\xi = hf$ est à l'intérieur du tore qui nous sert de surface d'intégration; la courbe $R = 0$ ou $\eta = k\varphi$ est au contraire à l'extérieur. Si donc nous considérons l'observateur qui définit le sens de l'intégration, nous verrons qu'il est dirigé vers l'extérieur du tore, c'est à dire du même côté que la courbe $R = 0$, et du côté opposé à la courbe $Q = 0$. Ces deux courbes jouent donc des rôles différents.

La seconde partie de l'analyse de M. Stieltjes ne soulevait pas d'objection analogue à celles que nous venons de discuter. Néanmoins comme elle n'a pas encore été publiée et qu'elle est fort courte, je vais l'exposer ici en quelques mots.

Si nous donnons à P, Q et R leurs valeurs (2), il est aisé de voir que notre intégrale sera égale à

$$4\pi^2 F(\xi_0, \eta_0)$$

ξ_0 et η_0 étant les valeurs de ξ et de η très voisines de 0 qui satisfont aux deux équations:

$$\xi = hf, \qquad \eta = k\varphi.$$

D'autre part si h et k sont assez petits pour qu'on ait en tous les points de notre tore:

$$\left|\frac{hf}{\xi}\right| < 1, \qquad \left|\frac{k\varphi}{\eta}\right| < 1$$

l'intégrale pourra se développer en série comme il suit:

$$\sum h^n k^p \iint \frac{F f^n \varphi^p \, d\xi\, d\eta}{\xi^{n+1}\eta^{p+1}} - \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p \, d\xi\, d\eta}{\xi^n \eta^{p+1}}$$

$$- \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1} \, d\xi\, d\eta}{\xi^{n+1}\eta^p} + \sum h^n k^p \iint \frac{F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1} \, d\xi\, d\eta}{\xi^n \eta^p}.$$

Ce qui donne, d'après les principes du paragraphe précédent:

$$F(\xi_0, \eta_0) = \sum h^n k^p \left[\frac{D_{n,p}(F f^n \varphi^p)}{n!\, p!} - \frac{D_{n-1,p}\left(F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p\right)}{(n-1)!\, p!} - \frac{D_{n,p-1}\left(F \frac{d\varphi}{d\eta} f^n \varphi^{p-1}\right)}{n!\, (p-1)!} \right.$$

$$\left. + \frac{D_{n-1,p-1}\left(F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} f^{n-1} \varphi^{p-1}\right)}{(n-1)!\, (p-1)!} \right].$$

Dans le second membre ξ et η sont supposés remplacés par 0 et 0. Quant à la notation $D_{n,p}$, on a écrit pour abréger:

$$D_{n,p}(u) = \frac{d^{n+p} u}{d\xi^n \, d\eta^p}.$$

En réduisant, il reste pour la partie entre crochets:

$$\frac{1}{n\cdot p}\left\{ D_{n,p}(Ff^n\varphi^p) - D_{n-1,p}\left(F\frac{df^n}{d\xi}\varphi^p\right) - D_{n,p-1}\left(Ff^n\frac{d\varphi^p}{d\eta}\right) + D_{n-1,p-1}\left[F\frac{\partial(f^n,\varphi^p)}{\partial(\xi,\eta)}\right]\right\}$$

ou bien:

$$\frac{1}{n\cdot p} D_{n-1,p-1}\left[D_{1,1}(Ff^n\varphi^p) - D_{0,1}\left(F\frac{df^n}{d\xi}\varphi^p\right) - D_{1,0}\left(Ff^n\frac{d\varphi^p}{d\eta}\right) + F\frac{\partial(f^n,\varphi^p)}{\partial(\xi,\eta)}\right]$$

ou enfin en réduisant encore:

$$\frac{1}{n\cdot p} D_{n-1,p-1}\left[\frac{d^2F}{d\xi d\eta} f^n\varphi^p + \frac{dF}{d\xi}\frac{d(f^n)}{d\eta}\varphi^p + \frac{dF}{d\eta}\frac{d(\varphi^p)}{d\xi}f^n\right].$$

On est ainsi conduit à une généralisation de la formule de Lagrange.

§ 6. *Seconde application.*

Il n'est pas douteux qu'on ne puisse tirer des principes qui précèdent une foule d'applications différentes. Je me bornerai à exposer ici la suivante.

Il est aisé de démontrer qu'une fonction entière d'une variable, dont le module reste inférieur à une quantité donnée, se réduit à une constante. Ce résultat s'étend immédiatement aux fonctions de deux variables. On peut d'ailleurs l'énoncer comme il suit:

Une fonction entière de deux variables ξ et η qui tend vers une limite finie et déterminée quand ξ et η tendent vers l'infini, et quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, se réduit à une constante.

La théorie actuelle nous permet de faire un pas de plus.

Il n'est pas nécessaire, pour que la fonction se réduise à une constante, qu'elle tende vers une limite finie et déterminée quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini.

Supposons, pour préciser davantage, que l'on pose:

$$\xi = (\alpha + i\beta)\rho, \qquad \eta = (\gamma + i\delta)\rho$$

avec la condition

(1) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Faisons ensuite croître ρ indéfiniment, α, β, γ, δ restant constants.

Les théories anciennes nous permettent d'affirmer ce qui suit:

Si quels que soient α, β, γ, δ, la fonction entière, $F(\xi, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée, cette fonction est une constante. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que cette limite soit la même pour toutes les valeurs des quatre quantités α, β, γ, δ; il suffit qu'elle soit toujours finie.

Grâce à la théorie actuelle, nous pouvons affirmer quelque chose de plus.

La fonction entière F sera une constante, non seulement pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs possibles de α, β, γ, δ, mais encore pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs de α, β, γ, δ qui satisfont non seulement à la relation (1), mais à une autre relation convenablement choisie.

Reprenons les quatre relations fondamentales du paragraphe précédent:

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \qquad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \qquad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1}$$

$$k^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

Nous avons vu que les équations

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \eta = 0$$

étaient respectivement représentées dans l'espace (λ, μ, ν) par le cercle

$$\lambda = 0, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et par la droite:

$$\mu = \nu = 0.$$

Nous avons vu en outre que l'équation

$$\operatorname{mod}^2 \eta = \rho_2^2$$

était représentée par le tore:

$$(k^2 + 1)^2 \rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2 + \nu^2).$$

Ces tores sont de révolution autour de l'axe des λ et on peut les définir géométriquement en disant qu'ils sont le lieu des points M tels

que le rapport de la plus grande et de la plus petite distance de M au cercle $\xi = 0$ soit constant.

Venons maintenant à l'équation:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

où α et β sont des coefficients imaginaires quelconques. Elle représentera aussi un cercle. De plus ce cercle devra se trouver tout entier sur le tore:

$$|\eta|^2 = \frac{|\alpha|^2\rho^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}.$$

Ce ne peut d'ailleurs être ni un des cercles méridiens qui ont pour équation

$$\eta = \text{const.}$$

ni un des cercles parallèles qui ont pour équation

$$\xi = \text{const.}$$

Mais on sait que si l'on coupe le tore par un plan bitangent, l'intersection se décompose en deux cercles. Le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0$$

sera donc l'un de ces deux cercles.

Si les axes sont placés comme ils le sont d'ordinaire, ce sera celui des deux cercles qui est situé à gauche d'un observateur placé suivant l'axe des λ et regardant la partie des deux cercles qui est dirigée vers sa tête.

En faisant varier les deux coefficients α et β on obtiendra donc une famille de cercles que j'appellerai les cercles C.

Ces cercles seront toujours réels et leur rayon ne pourra s'annuler.

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que deux quelconques des cercles C sont entrelacés, dans le sens donné à ce mot au paragraphe précédent.

En effet les cercles

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0, \qquad \gamma\xi + \delta\eta = 0$$

sont évidemment entrelacés si

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 1.$$

Faisons ensuite varier d'une manière continue les quatre coefficients α, β, γ, δ et voyons si les deux cercles peuvent cesser d'être entrelacés. Ils ne pourraient cesser de l'être que s'ils arrivaient d'abord à se couper. Or s'ils se coupaient, on aurait un point d'intersection:

$$\xi = \eta = 0$$

ce qui est impossible, puisque les formules (2) conduisent à la relation:

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = \rho^2.$$

Pour faire comprendre l'importance de cet entrelacement, considérons l'équation plus générale

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma.$$

Cette équation représentera encore une famille de cercles, les cercles C'', dont les cercles C ne sont que des cas particuliers.

Deux cercles C''

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$$

peuvent être ou n'être pas entrelacés. Ils le seront si:

$$|\alpha\gamma' - \alpha'\gamma|^2 + |\beta\gamma' - \beta'\gamma|^2 < \rho^2 |\alpha\beta' - \alpha'\beta|^2.$$

Ils ne le seront pas dans le cas contraire.

L'intégrale double

$$\iint \frac{F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta - \gamma)(\alpha'\xi + \beta'\eta - \gamma')}$$

prise le long d'une surface qui enveloppe le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$$

en laissant en dehors le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$$

sera égale tantôt à o, tantôt à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha_1\beta' - \alpha'_1\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

où ξ_0 et η_0 satisfont aux équations simultanées

$$\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 = \gamma, \qquad \alpha'\xi_0 + \beta'\eta_0 = \gamma'.$$

Elle sera égale à o si les deux cercles ne sont pas entrelacés et à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha_1\beta' - \alpha'_1\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

s'ils sont entrelacés.

Dans le cas des cercles C, comme il y a toujours entrelacement, on aura:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha'\xi + \beta'\eta)} = \frac{4\pi^2}{\alpha_1\beta' - \alpha'_1\beta} F(o, o).$$

De même l'intégrale:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m (\alpha'\xi + \beta'\eta)^p}$$

s'exprimera très simplement à l'aide des dérivées d'ordre $m + p$ de F, ou plutôt des valeurs de ces dérivées pour $\xi = \eta = o$. L'expression sera linéaire et les coefficients dépendront de α, β, α', β'. (Voir la fin du § 4.)

Cela posé voyons comment chaque point de l'espace (λ, μ, ν), représente une manière pour ξ et η de tendre vers l'infini.

Imaginons que λ, μ, ν conservant la même valeur, ρ croisse indéfiniment. x, y, z et t croîtront indéfiniment et de façon que leurs rapports demeurent constants. Lors donc que x, y, z, t croissent au délà de toute limite, mais de telle façon que leurs rapports tendent vers des limites finies et déterminées, cette manière de tendre vers l'infini sera représentée par un point de l'espace (λ, μ, ν).

Une surface S appartenant à cet espace représentera donc un ensemble de manières de tendre vers l'infini.

Imaginons qu'une surface S soit telle que le cercle:

$$\alpha\xi + \beta\eta = o$$

soit tout entier à son intérieur et le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = 0$$

tout entier à l'extérieur.

Supposons que, quand ξ et η tendent vers l'infini de l'une des manières représentées par les divers points de cette surface S, la fonction entière F tende vers une limite finie et déterminée.

A cette condition, F se réduira à une constante. En effet l'intégrale:

$$\iint \frac{F d\xi d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m (\alpha'\xi + \beta'\eta)^p}$$

prise le long de S, tendra vers 0 quand ρ croîtra indéfiniment, (à moins que $m = p = 1$). Elle est donc nulle.

Donc toutes les dérivées de F s'annulent pour $\xi = \eta = 0$.

Donc F est une constante.

En résumé, si on sait démontrer que F tend vers une limite finie quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, F est une constante; voilà ce qu'on savait déjà.

Supposons maintenant qu'on sache démontrer seulement que F tend vers une limite finie quand ξ et η tendent vers l'infini d'une certaine manière. L'espace (λ, μ, ν) dont les points représentent les différentes façons de tendre vers l'infini, sera alors partagée en diverses régions. Pour les unes, on saura démontrer que F tend vers une limite finie; pour les autres, on ne saura rien.

Si par exemple il y a une région de l'espace qui contienne l'un des cercles C tout entier et en tous les points de laquelle la limite F soit finie, on sera certain que F est une constante.

Ou bien encore supposons que l'espace se divise en trois régions R_1, R_2 et R_3, de telle façon que l'on ne puisse passer de R_1 à R_3 sans traverser R_2. Imaginons que R_1 contienne un des cercles C tout entiers; que R_3 contienne un autre cercle C tout entier et qu'en tous les points de R_2 la limite de F soit finie. Nous serons encore certains dans ce cas que F est une constante.

§ 7. *Périodes variables.*

J'arrive à un autre ordre de considérations où l'on verra la principale différence qui éloigne la théorie actuelle de celle des intégrales simples.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction sous le signe $\iint$ ne devenait infinie en aucun des points de la surface d'intégration.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire comme elle l'était dans le cas des intégrales simples. Il arrive en effet, comme nous allons le voir, que l'intégrale reste finie bien que la fonction sous le signe $\iint$ devienne infinie.

Soit S la surface d'intégration appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et dans ce même espace, une courbe singulière C en tous les points de laquelle la fonction $F(\xi, \eta)$ devienne infinie. Supposons que cette courbe C coupe la surface S de telle sorte que l'une des portions de C soit à l'intérieur de S et l'autre à l'extérieur.

Prenons maintenant l'intégrale:

$$\iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

le long de la surface S. La fonction F sera infinie aux points où C coupe S, mais en général elle sera infinie de 1er ordre seulement. L'intégrale restera alors finie.

Nous savons en effet qu'une intégrale multiple d'ordre n reste finie quand la fonction sous les n signes $\int$ devient infinie en un point isolé, pourvu toutefois qu'elle soit infinie d'ordre inférieur à n.

Pour évaluer cette intégrale double, on peut opérer absolument de la même façon que dans le § 4. Posons alors

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}.$$

Nous supposerons que P ne devient pas infini à l'intérieur de S, et que Q ne devient infini que le long de la courbe C. Cela suppose que S ne contient pas d'autre courbe singulière que C; mais cette hypothèse est toujours permise, car s'il en était autrement, on remplacerait la surface S par plusieurs autres ne contenant chacune qu'une courbe singulière.

L'intégrale double sera égale alors à l'intégrale simple

$$\int \frac{2i\pi P\,d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}.$$

Cette intégrale au lieu d'être prise tout le long de C, sera prise seulement le long d'une partie de cette courbe, puisqu'une partie seulement de cette courbe est intérieure à S.

Si P est rationnel et si Q est un polynôme entier, cette intégrale simple est encore une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$Q(\xi, \eta) = 0.$$

Mais ce n'est plus une période de cette intégrale, c'est une intégrale prise entre deux points quelconques de la courbe $Q = 0$.

Quant au sens dans lequel on doit suivre la courbe C, on le déterminerait par la règle du § 4.

Nous pouvons donner aux intégrales doubles de cette forme le nom de périodes, puisqu'elles sont prises le long de surfaces fermées. Mais elles diffèrent beaucoup des périodes que nous avons envisagées jusqu'ici.

Si en effet, nous déformons d'une façon continue la surface d'intégration S, l'arc de C qui sera à l'intérieur de S variera aussi d'une façon continue. Il en sera donc de même de la période.

Ces périodes ne sont donc pas des constantes. Ce sont des *périodes variables.* Il importe d'ailleurs de ne pas les confondre avec les intégrales auxquelles M. Picard avait donné ce nom dans ses notes du 29 Janvier 1883 et du 1er Février 1886.

Je rappelle que dans l'introduction nous sommes convenus de ne pas le leur conserver afin d'éviter toute confusion.

§ 8. *Applications aux fonctions θ.*

Je vais reprendre les notations dont j'ai fait usage dans mon mémoire *sur les fonctions Abéliennes* (American Journal of Mathematics Vol. VIII, N° 4).

J'envisagerai une fonction abélienne de deux variables ξ et η et j'appellerai les quatre périodes fondamentales:

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 & \text{pour } \xi \\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 & \text{pour } \eta. \end{array}$$

J'envisagerai une fonction intermédiaire Φ jouissant des propriétés suivantes:

Elle est entière et de plus elle a pour une quelconque des 4 périodes

$$\Phi(\xi + a_i,\ \eta + b_i) = \Phi(\xi,\ \eta)e^{\alpha_i\xi + \beta_i\eta + \gamma_i}.$$

Je poserai ensuite:

$$M_{ik} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i - \alpha_i a_k - \beta_i b_k.$$

M_{ik} sera égal à un entier multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$.

Si les périodes (1) sont des périodes normales, on aura:

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Si les périodes (1) ne sont pas normales, on aura une relation analogue

$$(2)\qquad \sum N_{ik} a_i b_k = 0$$

où

$$N_{ii} = 0, \qquad N_{ik} = - N_{ki}.$$

Les N seront des entiers dont le déterminant est égal à 1.

En d'autres termes le premier membre de l'équation (2) est une forme bilinéaire de discriminant 1.

On aura d'ailleurs:

$$M_{ik} = 2m\pi\sqrt{-1}\, N_{ik}$$

m étant l'ordre de la fonction intermédiaire Φ.

On sait que les fonctions Θ ne sont que des cas particuliers des fonctions intermédiaires qui s'y ramènent d'ailleurs aisément.

Nous allons maintenant définir notre espace λ, μ, ν.

Distinguons les parties réelles et imaginaires des périodes, en faisant:

$$a_i = a_i' + a_i''\sqrt{-1}, \qquad b_i = b_i' + b_i''\sqrt{-1}.$$

Posons ensuite:

$$x = a_1'\lambda + a_2'\mu + a_3'\nu$$

$$y = a_1''\lambda + a_2''\mu + a_3''\nu$$

$$z = b_1'\lambda + b_2'\mu + b_3'\nu$$

$$t = b_1''\lambda + b_2''\mu + b_3''\nu.$$

Nous étendrons nos intégrations à la surface totale du cube dont les 6 faces ont pour équation:

$$\lambda \quad \text{ou} \quad \mu \quad \text{ou} \quad \nu = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Les courbes singulières que nous considérerons auront toutes pour équation:

$$\Phi = 0.$$

A l'intérieur de notre cube, il pourra se trouver plusieurs branches de la courbe singulière $\Phi = 0$, mais parmi ces branches, nous devrons distinguer les branches fermées et les branches ouvertes limitées à chacune de leurs deux extrémités par l'une des faces du cube. Les points qui doivent surtout attirer notre attention sont les extrémités des branches ouvertes, c'est à dire les points où la courbe $\Phi = 0$ coupe les faces du cube.

Mais nous distinguerons ces points en deux catégories. Supposons que dans le voisinage d'un de ces points, les équations de $\Phi = 0$ puissent se mettre sous la forme:

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega)$$

ainsi qu'il est dit au § 4.

Nous formerons le déterminant Δ du § 4 qui s'écrira ici:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dy}{d\omega} & a_1' & a_2' & a_3' \\ \frac{dx}{d\omega} & a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ -\frac{dt}{d\omega} & b_1' & b_2' & b_3' \\ \frac{dz}{d\omega} & b_1'' & b_2'' & b_3'' \end{vmatrix}.$$

Nous avons vu que si ce déterminant est positif, il faut, dans les intégrations, suivre la courbe $\Phi = 0$ dans le sens des ω croissants, et qu'il faut la suivre au contraire dans le sens des ω décroissants si Δ est négatif.

Comme ω reste arbitraire dans une large mesure, on peut toujours choisir cette variable de telle sorte que Δ soit positif et que par conséquent on ait toujours à suivre la courbe dans le sens des ω croissants.

Cela posé si nous considérons un des points d'intersection P de la courbe $\Phi = 0$ avec une des faces du cube, et que dans le voisinage de ce point, on suive cette courbe dans le sens des ω croissants, il pourra se présenter deux cas. Ou bien on passera de l'extérieur du cube à l'intérieur, ou inversement.

Nous distinguerons donc deux sortes de points P; le point P sera positif si l'on passe de l'extérieur du cube à l'intérieur et négatif dans le cas contraire.

Pour reconnaître le signe d'un de ces points, imaginons que ce point appartienne à la face $\lambda = 0$, et que dans le voisinage de ce point, on ait pour l'équation de $\Phi = 0$

$$\xi = f(\eta).$$

Il viendra alors:

$$d\xi = (\alpha + i\beta)d\eta$$

ou

$$\alpha + i\beta = \frac{df}{d\eta} = -\frac{\frac{d\Phi}{d\eta}}{\frac{d\Phi}{d\xi}}$$

en remplaçant $d\xi$ et $d\eta$ par leurs valeurs et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient:

$$(3) \quad \begin{cases} (a_1' - \alpha b_1' + \beta b_1'')d\lambda + (a_2' - \alpha b_2' + \beta b_2'')d\mu + (a_3' - \alpha b_3' + \beta b_3'')d\nu = 0 \\ (a_1'' - \alpha b_1'' + \beta b_1')d\lambda + (a_2'' - \alpha b_2'' + \beta b_2')d\mu + (a_3'' - \alpha b_3'' + \beta b_3')d\nu = 0. \end{cases}$$

Ce sera en étudiant les coefficients des équations (3) qu'on reconnaitra si le point P est positif ou négatif.

Si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue, le passage des points P positifs aux points P négatifs se fera au moment où $d\lambda$ est nul, c'est à dire où:

$$(4)\quad (a_2' - \alpha b_2' + \beta b_2'')(a_3'' - \alpha b_3'' - \beta b_3') - (a_3' - \alpha b_3' + \beta b_3'')(a_2'' - \alpha b_2'' - \beta b_2') = 0.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'équation (4).

Nous n'avons encore rien supposé au sujet de la fonction Φ qui égalée à o définira la courbe singulière; nous choisirons plus tard pour Φ une fonction intermédiaire, mais dans ce qui a été dit jusqu'ici, rien ne préjuge ce choix.

Faisons en particulier:

$$\Phi = \xi - \xi_0 .$$

Alors on aura

$$\alpha = \beta = 0$$

et le premier membre de (4) se réduira à:

$$a_2' a_3'' - a_3' a_2''.$$

C'est la partie imaginaire du produit:

$$\overline{a}_2 a_3$$

en désignant par $\overline{a}_2$ la quantité imaginaire conjuguée de a_2.

Prenons le cas particulier où

$$a_2 = 1, \qquad a_3 = i.$$

Alors le premier membre de (4) se réduit à 1 et est par conséquent positif. Nous pouvons supposer en même temps $a_1 = 0$. Les équations (3) se réduisent alors à

$$d\mu = d\nu = 0.$$

On en conclut que

$$dx = dy = 0$$

$$dz = b_1' d\lambda, \qquad dt = b_1'' d\lambda.$$

Le déterminant Δ se réduit à

$$-\frac{d\lambda}{d\omega}(b_1'^2 + b_1''^2)$$

il est donc négatif.

Donc quand le premier membre de (4) est positif, le point P est négatif et inversement.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les points P situés sur la face du cube qui a pour équation $\lambda = 0$. On raisonnerait de même pour les cinq autres faces et on arriverait aux conclusions suivantes:

Posons

$$\alpha + i\beta = -\frac{\frac{d\Phi}{d\eta}}{\frac{d\Phi}{d\xi}} = h.$$

Posons ensuite:

$$c_i = a_i - hb_i$$

et soit $\bar{c}_i$ la quantité imaginaire conjuguée de c_i.

Soit enfin $I(u) =$ partie imaginaire de u.

Les points P seront positifs

pour la face	$\lambda = 0$	si	$I(c_2\bar{c}_3) > 0$
»	$\lambda = 1$	si	$I(c_2\bar{c}_3) < 0$
»	$\mu = 0$	si	$I(c_3\bar{c}_1) > 0$
»	$\mu = 1$	si	$I(c_3\bar{c}_1) < 0$
»	$\nu = 0$	si	$I(c_1\bar{c}_2) > 0$
»	$\nu = 1$	si	$I(c_1\bar{c}_2) < 0.$

Nous devons remarquer que si nous avons sur la face $\lambda = 0$ un point P dont les coordonnées soient $(0, \mu, \nu)$, nous aurons sur la face opposée $\lambda = 1$ un point P' dont les coordonnées seront $(1, \mu, \nu)$. De plus les points P et P' seront de signe contraire.

De même à tout point P situé sur l'une des faces $\mu = 0$, $\nu = 0$, correspondra un autre point P de signe contraire situé sur la face opposée.

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\iint \frac{\frac{d\Phi}{d\eta}d\xi d\eta}{\Phi}$$

et étendons-la à toute la surface de notre cube.

Soient N_1 et N_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\lambda = 0$. Soient de même N'_1 et N'_2, N''_1 et N''_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\mu = 0$ et sur la face $\nu = 0$.

L'intégrale double se ramène alors à l'intégrale simple:

$$\int 2i\pi d\xi$$

prise le long des diverses courbes $\Phi = 0$. Celle-ci est évidemment égale à:

$$2i\pi(\Sigma\xi_1 - \Sigma\xi_2).$$

$\Sigma\xi_1$ représente la somme des ξ relatifs aux divers points P positifs, $\Sigma\xi_2$ la somme des ξ relatifs aux divers points P négatifs.

Or à chacun des N_1 points P positifs de la face $\lambda = 0$, correspondent N_1 points P négatifs appartenant à la face $\lambda = 1$. La différence des ξ est égale à a_1.

L'intégrale est donc égale à:

$$(5) \qquad 2i\pi[(N_1 - N_2)a_1 + (N'_1 - N'_2)a_2 + (N''_1 - N''_2)a_3].$$

D'autre part considérons deux points correspondants des deux faces opposées $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Soient ψ_1 et ψ_0 les valeurs de $\frac{d\Phi}{\Phi d\eta}$ en ces deux points, on aura:

$$\psi_1 - \psi_0 = \beta_1$$

de sorte que l'intégrale double étendue aux deux faces $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, se ramène à l'intégrale double:

$$\beta_1 \iint d\xi d\eta$$

étendue à la face $\lambda = 0$ toute seule.

Cette intégrale est alors égale à

$$\beta_1(a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

On trouverait des expressions analogues pour les autres faces de telle sorte que l'intégrale totale est égale au déterminant:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est donc égal à l'expression (5).

D'une façon plus générale, posons:

$$\xi = a_i\lambda + a_k\mu$$

$$\eta = b_i\lambda + b_k\mu$$

et envisageons alors l'équation:

$$\Phi(a_i\lambda + a_k\mu,\ b_i\lambda + b_k\mu) = 0.$$

On pourra satisfaire à cette équation d'un certain nombre de manières par des valeurs de λ et de μ réelles et comprises entre 0 et 1. Parmi ces solutions qui correspondent à divers points P, distinguons celles pour lesquelles la partie imaginaire de $c_i\bar{c}_k$ est positive, de celles pour lesquelles cette partie imaginaire est négative. Soit ensuite P_{ik} l'excès du nombre des solutions de la première sorte sur le nombre des solutions de la deuxième sorte. D'après cette définition, on aura:

$$P_{ik} = -P_{ki}, \qquad P_{ii} = 0,$$

$$P_{23} = N_1 - N_2, \qquad P_{31} = N_1' - N_2', \qquad P_{12} = N_1'' - N_2''.$$

Remarquons de plus que la partie imaginaire de $c_i\bar{c}_k$ peut se mettre sous une autre forme:

$$I(c_i\bar{c}_k) = \left|\frac{d\Phi}{d\xi}\right|^2 I\left[\frac{d\Phi}{d\lambda}\frac{\overline{d\Phi}}{d\mu}\right].$$

Elle est donc de même signe que la partie imaginaire de

$$\frac{d\Phi}{d\lambda}\frac{\overline{d\Phi}}{\overline{d\mu}}.$$

De plus nous pouvons écrire:

$$2i\pi(a_1P_{23}+a_2P_{31}+a_3P_{12})=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

On aurait de même par symétrie:

$$2i\pi(a_2P_{34}+a_3P_{42}+a_4P_{23})=\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\end{vmatrix}$$

$$2i\pi(a_3P_{41}+a_4P_{13}+a_1P_{34})=\begin{vmatrix}\beta_3 & \beta_4 & \beta_1\\ a_3 & a_4 & a_1\\ b_3 & b_4 & b_1\end{vmatrix}$$

et une quatrième équation analogue.

On peut réunir ces quatre équations en une seule, en écrivant symboliquement:

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{vmatrix}=2i\pi\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 & \overline{\omega}_4\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Dans cette identité x_1, x_2, x_3, x_4 sont des quantités quelconques. Quant aux ω et aux $\overline{\omega}$ ce sont des quantités qui ont un sens symbolique. Nous convenons de remplacer dans le développement du second membre:

$$\omega_i\overline{\omega}_k-\omega_k\overline{\omega}_i$$

par

$$P_{ik}.$$

Comme rien ne distingue ξ de η nous pouvons écrire de même:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 & \overline{\omega}_4 \end{vmatrix}.$$

Nous écrirons plus simplement encore les équations symboliques (6) et (7) de la façon suivante en écrivant les déterminants sous une forme abrégée:

$$(6')\qquad (x\beta ab) = 2i\pi(xa\omega\overline{\omega})$$

$$(7')\qquad (x\alpha ba) = 2i\pi(xb\omega\overline{\omega}).$$

Posons

$$P_{ik} = h(\alpha_i a_k - \alpha_k a_i) + k(\beta_i\beta_k - \beta_k\beta_i)$$

et cherchons à déterminer h et k par les équations (6) et (7). Il vient:

$$(xa\omega\overline{\omega}) = h(xa\alpha a) + k(xa\beta b) = -k(x\beta ab)$$

$$(xb\omega\overline{\omega}) = h(xb\alpha a) + k(xb\beta b) = -h(x\alpha ba)$$

de sorte que les équations (6) et (7) donnent:

$$h = k = -\frac{1}{2i\pi}$$

d'où

$$P_{ik} = \frac{M_{ik}}{2i\pi} = mN_{ik}.$$

Nous avons donc une solution des équations (6) et (7). Je dis qu'il n'y en a pas d'autres, du moins en nombres entiers.

En effet s'il y en avait deux, on pourrait trouver des nombres entiers P'_{ik} satisfaisant aux huit équations:

$$a_i P'_{kl} + a_k P'_{li} + a_l P'_{ik} = 0$$

$$b_i P'_{kl} + b_k P'_{li} + b_l P'_{ik} = 0.$$

En d'autres termes si l'on pose symboliquement:

$$P'_{ik} = \omega'_i\overline{\omega}'_k - \omega_k\overline{\omega}'_i$$

et que l'on envisage la forme bilinéaire:

$$(xy\omega'\overline{\omega}')$$

cette forme bilinéaire s'annulera identiquement quand on y fera soit:

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \quad y_3 = a_3, \quad y_4 = a_4$$

soit:

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \quad y_3 = b_3, \quad y_4 = b_4.$$

Faisons subir à x et à y, en même temps qu'à a et à b un changement linéaire de variable en faisant:

$$x_i = \Sigma q_{ik} x'_k, \quad y_i = \Sigma q_{ik} y'_k, \quad a_i = \Sigma q_{ik} a'_k, \quad b_i = \Sigma q_{ik} b'_k.$$

Nous choisirons ce changement de variables (où les q sont des entiers) de façon à réduire la forme bilinéaire $(xy\omega'\overline{\omega}')$ qui s'écrira alors:

$$A(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) + B(x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3).$$

On devrait donc avoir identiquement:

$$A(x'_1 a'_2 - x'_2 a'_1) + B(x'_3 a'_4 - x'_4 a'_3) = 0$$
$$A(x'_1 b'_2 - x'_2 b'_1) + B(x'_3 b'_1 - x'_4 b'_3) = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que si A et B sont nuls; (mais alors la forme bilinéaire est identiquement nulle et par conséquent tous les P'_{ik} sont nuls C. Q. F. D.) ou encore si un seul des coefficients A et B s'annule, A par exemple, mais alors il faut encore que:

$$a'_3 = a'_4 = b'_3 = b'_4 = 0.$$

La fonction abélienne n'aurait plus alors que deux périodes; la seconde hypothèse est donc inadmissible.

On doit donc conclure de cette discussion que l'unique solution des équations (6) et (7) c'est:

$$P_{ik} = m N_{ik}.$$

Dans le cas particulier où la fonction Φ se réduit à une fonction θ d'ordre m, et où l'on a:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2i\pi, & a_2 = 0, & a_4 = b_3, & \\ b_1 = 0, & b_2 = 2i\pi, & \ldots\ldots & \\ \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = m, & \alpha_4 = 0 \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0, & \beta_4 = m \end{array}$$

tous les N_{ik} sont nuls, excepté N_{31} et N_{42} qui sont égaux à 1.

Tous les P_{ik} sont donc nuls excepté P_{31} et P_{42} qui sont égaux à m.

Si nous reprenons les notations N_1, N_2, N'_1, N'_2 etc. de telle sorte que:

$$P_{23} = N_1 - N_2, \qquad P_{31} = N'_1 - N'_2, \quad \ldots$$

nous aurons

$$N_1 = N_2$$

et

$$N'_2 - N'_1 = m.$$

On pourrait trouver plus intéressant de connaître le nombre $N'_1 + N'_2$, c'est à dire le nombre total des P, au lieu d'avoir seulement l'excès du nombre des points P positifs sur celui du nombre des points P négatifs.

Nous avons toutefois un renseignement sur ce nombre $N'_1 + N'_2$. Il est plus grand que m et de même parité que m, car il est clair que:

$$N'_2 + N'_1 > N'_2 - N'_1; \qquad N'_2 + N'_1 \equiv N'_2 - N'_1 \pmod 2.$$

On pourrait arriver à tous les résultats qui précèdent par l'emploi des différentielles totales, cela serait même plus simple; mais je n'ai voulu donner ici qu'une application de la théorie des intégrales doubles.

Paris, 24 Décembre 1886.

ÜBER EIN THEOREM DES HERRN TISSERAND AUS DER STÖRUNGSTHEORIE

VON

AND. LINDSTEDT
in STOCKHOLM.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung (Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, tome 18) hat Herr TISSERAND, beim Beweise des von mir gefundenen Satzes über die Darstellbarkeit der gegenseitigen Entfernungen im Probleme der drei Körper durch periodische Reihen mit vier Argumenten, einen zweiten Satz über die Form der Reihen für die rechtwinkligen Coordinaten hergeleitet. In Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen z-Axe senkrecht zur invariablen Ebene steht und dessen xy-Ebene eine gleichförmige Rotation ausführt, lassen sich nähmlich auch die rechtwinkligen Coordinaten der drei Massenpunkte, in der relativen Bewegung um einen derselben, mit Hülfe der vier Argumente darstellen. Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes für die Astronomie erlaube ich mir hier zu zeigen, wie man denselben mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen, durch welche ich den zuerst genannten Satz bewiesen habe, ableiten kann.

Nachdem die gegenseitigen Entfernungen ermittelt worden sind, kann man die rechtwinkligen Coordinaten durch Integration des nach Einsetzung der Ausdrücke für r, r' und Δ linear gewordenen Systems

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{M+m}{r^3} + \frac{m'}{\Delta^3}\right) = x'\left(\frac{m'}{\Delta^3} - \frac{m'}{r'^3}\right) \\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + x'\left(\frac{M+m'}{r'^3} + \frac{m}{\Delta^3}\right) = x\left(\frac{m}{\Delta^3} - \frac{m}{r^3}\right) \end{aligned}\right.$$

u. s. w. für die übrigen Coordinaten, ermitteln. Die Funktionen, die in den Klammern stehen sind somit trigonometrische Reihen nach vier Argumenten.

Wendet man nun die Methode an, die ich in der Schrift *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie* (Mémoires de l'Académie de S:t Pétersbourg, tome 31, N° 4) benutzt habe, so ergeben sich im Allgemeinen für ein lineares System wie (1) Integrale von der Form

$$(2)\quad \begin{cases} x = \xi\Sigma\mu_N\cos(mt + \pi + N) + \xi'\Sigma\nu_N\cos(m't + \pi' + N) \\ x' = \xi\Sigma\mu'_N\cos(mt + \pi + N) + \xi'\Sigma\nu'_N\cos(m't + \pi' + N) \end{cases}$$

wo N eine lineare Verbindung der vier Argumente bedeutet, und mt sowie $m't$ zwei neue Argumente sind. Die entsprechenden Formeln für y, y' und für z, z' würde man erhalten, wenn man die Integrationskonstanten ξ, ξ', π, π' durch η, η', ρ, ρ' und ζ, ζ', σ, σ' resp. ersetzt.

Diese Integrale müssen indessen der Bedingung genügen, dass wenn man mit ihrer Hülfe die Funktionen

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2; \\ \Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \end{cases}$$

berechnet, die neuen Argumente mt und $m't$ aus den Resultaten herausfallen. Hierbei werden noch die überzähligen Integrationskonstanten mit bestimmt.

Berechnet man nun mit dem so gewonnenen Ausdrücken für x, y, z die Funktion $x^2 + y^2 + z^2$, so findet man sofort, dass die Anzahl der Argumente, wenn m und m' von einander wesentlich, d. h. nicht bloss um lineare Funktionen der gegebenen vier Argumente, verschieden sind, nur dann 4 wird, wenn

$$\xi = \xi' = \eta = \eta' = \zeta = \zeta' = 0$$

angenommen werden, dass also, mit anderen Worten, die durch Integration von (1) zu ermittelnden Reihen für x, y, ..., ausser den 4 gegebenen Argumenten, nur noch *ein* Argument enthalten können. Die in einem solchen Falle gewöhnlich auftretenden Glieder, welche t als Faktor haben, dürfen, wegen Erfüllung der Gleichungen (3), hier ebenfalls nicht vorkommen. Es bleibt somit für die Form der Integrale nur die folgende übrig:

$$x = \xi \Sigma \mu_N \cos(ht + \pi + N) + \xi' \Sigma \nu_N \cos(\pi' + N)$$

$$x' = \xi \Sigma \mu'_N \cos(ht + \pi + N) + \xi' \Sigma \nu'_N \cos(\pi' + N)$$

wo ht das neue, von den übrigen wesentlich verschiedene, Argument bezeichnet.

Für x, y, z erhalten wir somit, wenn wir die obigen Werthe etwas umformen, Ausdrücke von der Form

$$x = \cos ht\,.(aP - \alpha Q) - \sin ht\,.(aQ + \alpha P) + a'R + \alpha' S$$

$$y = \cos ht\,.(bP - \beta Q) - \sin ht\,.(bQ + \beta P) + b'R + \beta' S$$

$$z = \cos ht\,.(cP - \gamma Q) - \sin ht\,.(cQ + \gamma P) + c'R + \gamma' S$$

wo P, Q, R und S bloss von den vier ursprünglichen Argumenten abhängen, und a, b, ... Integrationskonstanten bedeuten.

Setzt man diese Werthe in $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ein, so findet man, als Bedingungen für das Verschwinden von ht, die Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = aa' + bb' + cc' = a'\alpha + \ldots = a\alpha' + \ldots = \alpha\alpha' + \ldots = 0.$$

Wir können somit, ohne die Allgemeinheit zu schaden, $\alpha' = a'$, $\beta' = b'$, $\gamma' = c'$ sowie (a, b, c) und (α, β, γ) gleich den Richtungscosinussen zweier zu einander rechtwinkligen Geraden setzen. Alsdann werden (a', b', c') die Richtungscosinusse für eine zu beiden senkrechte Gerade.

Werden diese drei Geraden als Axen eines Coordinatensystems genommen, so werden in diesem die Coordinaten der beiden Massenpunkte m und m' die Form annehmen

$$\begin{aligned}
\xi &= P \cos ht - Q \sin ht \\
\eta &= -Q \cos ht - P \sin ht \\
\zeta &= R \\
\xi' &= P' \cos ht - Q' \sin ht \\
\eta' &= -Q' \cos ht - P' \sin ht \\
\zeta' &= R'
\end{aligned}$$

wo die gestrichenen Buchstaben P', Q', R' ebenfalls Funktionen der vier Argumente sind.

In diesen Gleichungen ist das in Rede stehende Theorem des Herrn Tisserand enthalten. Dass übrigens die obigen Entwickelungen ohne Berücksichtigung der Konvergenzfrage gemacht worden sind und somit vorläufig bloss formale Bedeutung besitzen, braucht wohl kaum angedeutet zu werden.

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $X_n = 0$

PAR

T. J. STIELTJES

à TOULOUSE.

1. Nous aurons à invoquer dans la suite une proposition d'algèbre que nous allons établir tout d'abord.

Soit

$$X = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

une forme quadratique *positive* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

On sait que les coefficients a_{ii} sont positifs. Nous ajoutons maintenant la condition que les autres coefficients a_{ik} soient tous négatifs ou nuls.

Considérons les m équations linéaires

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial x_i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = \xi_i. \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

Nous supposons que les quantités ξ_i sont toutes positives ou nulles. Dans ces conditions on peut énoncer la proposition suivante: »*Aucune des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tirées des équations* (1) *ne peut être négative, et si les quantités ξ_i sont toutes positives alors $x_1, x_2, \ldots, x_m$ le sont aussi.*»

Dans la démonstration suivante nous ferons abstraction du cas trivial

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$$

dans lequel on a aussi

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

On a

$$\sum_1^m \xi_i x_i = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

et il est clair par là qu'au moins un des x_i doit être positif car le second membre est positif.

Mais supposons que

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ soient négatifs ou nuls, et}$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m \text{ positifs.}$$

Dans la relation

$$(2) \qquad \sum_1^n \xi_i x_i = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m x_i (a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \ldots + a_{ni} x_n)$$

le premier membre est nul ou négatif. Au contraire dans le second membre la première partie

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$$

est nulle ou positive, et il en est de même de la seconde partie

$$\sum_{n+1}^m x_i (a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \ldots + a_{ni} x_n).$$

Par conséquent les deux membres de la relation (2) sont nécessairement nuls tous les deux, ce qui exige:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

La première partie de notre proposition se trouve établie par là. Pour démontrer aussi la seconde partie nous observons qu'en supposant

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m \text{ positifs}$$

les n premiers équations (1) montrent qu'on a

$$(3) \qquad a_{ik} = 0$$

dès que l'un (et seulement un) des indices i, k surpasse n. Et ensuite il est clair qu'on doit avoir

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Cette dernière conséquence démontre la seconde partie de notre proposition.

Les équations (3) font voir que dans le cas exceptionnel que nous considérons on a

$$X = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m \sum_{n+1}^m a_{ik} x_i x_k$$

en sorte que X se décompose directement dans la somme de deux formes quadratiques positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x_{n+1}, \ldots, x_m$. Le cas $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ se présente alors dès qu'on prend $\xi_1 = \xi_2 = \ldots$ $\ldots = \xi_n = 0$.

D'après ce qui précède il est clair que lorsque X ne se décompose pas directement dans la somme de deux ou d'un plus grand nombre de formes quadratiques d'un nombre de variables moindre que m, alors $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont tous positifs, même dans le cas que quelques-uns des ξ_i sont nuls.

Corollaire. Soit D le déterminant de X et désignons par D_{ik} les mineurs de D en sorte qu'on a

$$Dx_i = \xi_1 D_{1i} + \xi_2 D_{2i} + \ldots + \xi_m D_{mi}$$

alors aucun des mineurs D_{ik} ne peut être négatif. Et si le cas exceptionnel examiné plus haut ne se présente pas, tous les D_{ik} sont positifs.

2. Supposons que sur l'axe des abscisses OX on ait dans les points A et B dont les abscisses sont -1 et $+1$ deux points matériels fixes, la masse du premier en A étant α, celle du second en B, β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Imaginons encore n points matériels de masse égale à 1, qui peuvent glisser librement sur l'axe et placés entre A et B. Supposons enfin que deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses et en raison inverse de leur distance. Dans ces conditions il y a une position unique d'équilibre pour les n points placés entre A et B, et si l'on désigne leurs abscisses dans la position d'équilibre par

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n \tag{4}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme du degré n défini par l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\varphi''(x) + 2[\alpha - \beta - (\alpha + \beta)x]\varphi'(x) + C\varphi(x) = 0. \tag{5}$$

C est une constante dont la valeur est

$$n(n + 2\alpha + 2\beta - 1)$$

comme on le trouve en cherchant le coefficient de x^n dans le premier membre de (5).

C'est là un cas particulier d'un théorème démontré dans ce journal, t. 6, p. 321 et suiv.

3. Les racines $x_1, \ldots, x_n$ dépendent de α et β et l'on peut les considérer comme fonctions des variables α et β qui doivent rester toujours positives.

Lorsque α et β varient d'une manière continue, x_i varie aussi d'une manière continue et comme deux racines ne deviennent jamais égales, leur ordre de grandeur fixé par les inégalités (4) ne sera jamais changé.

Nous allons démontrer les inégalités

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} > 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \beta} < 0. \tag{7}$$

En effet, les quantités $x_1, \ldots, x_n$ dépendent de α et de β par les relations

$$\frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\beta}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{x_i - x_n} = 0. \qquad (i - 1, 2, \ldots, n)$$

En prenant les dérivées par rapport à α on obtient pour les $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ le système linéaire suivant:

$$a_{i1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + a_{i2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \ldots + a_{in}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} = \frac{1}{x_i + 1} \tag{8}$$
$(i = 1, 2, \ldots, n$

où

$$a_{ii} = \frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{(x_i - x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(x_i - x_n)^2}$$

$$a_{ik} = a_{ki} = -\frac{1}{(x_i - x_k)^2}.$$

Ce système rentre évidemment dans le type des équations (1) car la forme quadratique

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} X_i X_k = \sum_1^n \left(\frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} \right) X_i^2 + \sum \sum \frac{1}{(x_i - x_k)^2} (X_i - X_k)^2$$

est positive, et $x_i + 1$ est aussi positif.

Les valeurs de $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}$ sont donc toutes positives.

On trouve de la même manière

$$a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \ldots + a_{in} \frac{\partial x_n}{\partial \beta} = \frac{1}{-x_i - 1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ici les seconds membres sont tous négatifs, et il en est donc de même des valeurs des $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$.

4. Considérons le cas particulier $\alpha = \beta$, en sorte que x_i est fonction de la seule variable α. Il est clair d'abord qu'on aura

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} = \ldots = 0.$$

Ainsi en supposant $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ il suffira de considérer les racines positives

$$x_1, x_2, \ldots, x_m.$$

Nous allons démontrer qu'on a toujours

$$\frac{dx_i}{d\alpha} < 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{9}$$

En effet supposons d'abord $n = 2m$, on aura

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\alpha}{x_i - 1} + \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i - x_m} \\ &\qquad + \frac{1}{x_i + x_1} + \ldots + \frac{1}{x_i + x_{i-1}} + \frac{1}{x_i + x_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{x_i + x_m} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

d'où l'on déduit

$$a_{i1} \frac{dx_1}{d\alpha} + a_{i2} \frac{dx_2}{d\alpha} + \ldots + a_{im} \frac{dx_m}{d\alpha} = -\frac{2x_i}{1 - x_i^2} \qquad (i = 1, \ldots) \tag{11}$$

en posant

$$a_{ii} = \frac{a}{(x_i + 1)^2} + \frac{a}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + P_i + Q_i$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i + x_k)^2} - \frac{1}{(x_i - x_k)^2}$$

$$P_i = \frac{1}{(x_i - x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i - x_m)^2}$$

$$Q_i = \frac{1}{(x_i + x_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i + x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i + x_{i+1})^2} + \ldots + \frac{1}{(x_i + x_m)^2}.$$

Le système (11) rentre encore dans le type des équations (1) car a_{ik} est négatif et la forme quadratique

$$\sum_1^m \sum_1^m a_{ik} X_i X_k = \sum_1 \left(\frac{a}{(x_i + 1)^2} + \frac{a}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + 2Q_i\right) X_i^2$$

$$+ \sum \sum \left(\frac{1}{(x_i - x_k)^2} - \frac{1}{(x_i + x_k)^2}\right)(X_i - X_k)^2$$

est positive. Mais les seconds membres dans le système (11) sont tous négatifs et l'on a par conséquent

$$\frac{dx_i}{da} < 0.$$

Dans le cas $n = 2m + 1$ on aura $x_{m+1} = 0$, et

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{x_i + 1} + \dfrac{a}{x_i - 1} + \dfrac{3}{2x_i} + \dfrac{1}{x_i - x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_i - x_{i-1}} + \dfrac{1}{x_i - x_{i+1}} + \ldots + \dfrac{1}{x_i - x_m} \\ \quad + \dfrac{1}{x_i + x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_i + x_{i-1}} + \dfrac{1}{x_i + x_{i+1}} + \ldots + \dfrac{1}{x_i + x_m} = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

La seule différence avec les relations (10) consiste, comme on le voit, dans le terme $\frac{3}{2x_i}$ qui est venu remplacer le terme $\frac{1}{2x_i}$. Ce terme

$$\frac{3}{2x_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i}$$

provient de l'action des deux points matériels dont les abscisses sont $-x_i$ et 0.

On trouve les équations linéaires suivantes pour les $\frac{dx_i}{d\alpha}$

$$a_{i1}\frac{dx_1}{d\alpha} + \ldots + a_{im}\frac{dx_m}{d\alpha} = -\frac{2x_i}{1 - x_i^2}$$

$$a_{ii} = \frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\alpha}{(x_i - 1)^2} + \frac{3}{2x_i^2} + P_i + Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i + x_k)^2} - \frac{1}{(x_i - x_k)^2}$$

et l'on en conclut les inégalités (9) comme tout à l'heure.

5. La démonstration des propositions exprimées par les inégalités (6), (7), (9) que nous venons de développer, nous semble la plus simple si l'on n'a en vue que ces inégalités elles-mêmes. Mais nous avons retrouvé ces inégalités encore comme conséquences d'une proposition d'un caractère plus général, à l'occasion d'études sur la quadrature mécanique de Gauss.

6. Nous allons développer maintenant quelques conséquences qui découlent presque immédiatement de ces inégalités (6), (7) et (9).

Supposons d'abord

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

l'équation (5) devient

$$(1 - x^2)\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + n(n + 1)\varphi(x) = 0$$

ainsi x_i est une racine de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme X_n de Legendre.

Prenons ensuite

$$\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}.$$

On a

$$(1 - x^2)\varphi''(x) + (1 - 2x)\varphi'(x) + n(n + 1)\varphi(x) = 0$$

ou si l'on pose

$$x = \cos\varphi,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,\varphi(x) = y,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 y = 0.$$

donc

$$\varphi(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

et par conséquent

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}.$$

Dans le cas

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = \frac{3}{4}$$

on trouve de la même manière

$$x = \cos\varphi,$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

$$x_i = \cos\frac{2i\pi}{2n+1}.$$

Mais d'après les inégalités (6), (7) il est clair que la valeur de x_i qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ doit être plus petite que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et plus grande que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$.

Ainsi on a la limitation suivante pour la racine x_i de l'équation $X_n = 0$

$$\text{(A)} \qquad \cos\frac{2i\pi}{2n+1} < x_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}.$$

Cette proposition est due à M. Bruns qui l'a obtenue dans le tome 90 du Journal de Borchardt, pag. 327.

7. Nous pouvons obtenir des limites plus étroites à l'aide de l'inégalité (9).

Prenons en effet

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

on trouvera

$$x = \cos\varphi,$$
$$\varphi(x) = \cos n\varphi,$$
$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

et en second lieu

$$\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{3}{4},$$

on trouve

$$x = \cos\varphi,$$
$$\varphi(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$
$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}.$$

D'après les inégalités (9) on en conclut la limitation suivante d'une racine positive de l'équation $X_n = 0$:

(B) $$\cos\frac{i\pi}{n+1} < x_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Pour une racine négative on aurait évidemment

$$\cos\frac{i\pi}{n+1} > x_i > \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Soit $n = 10$, on a d'après (A)

	limites	
x_1	0,98883 0,95557	0,03326
x_2	0,90097 0,82624	0,07473
x_3	0,73305 0,62349	0,10956
x_4	0,50000 0,36534	0,13466
x_5	0,22252 0,07473	0,14779

et d'après (B)

	limites	
x_1	0,98769 0,95949	0,02820
x_2	0,89101 0,84125	0,04976
x_3	0,70711 0,65486	0,05225
x_4	0,45399 0,41542	0,03857
x_5	0,15643 0,14231	0,01412.

8. La proposition d'algèbre démontrée dans le N° 1, ou plutôt le corollaire que nous en avons déduit, se trouve lié étroitement à une question qui se présente dans le problème de la distribution d'électricité sur un système de conducteurs.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les conducteurs, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ leurs charges respectives et $V_1, V_2, \ldots, V_m$ les potentiels correspondants.

On a

$$(\alpha) \qquad V_i = p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + \ldots + p_{im}e_m \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

et réciproquement

$$(\beta) \qquad e_i = q_{i1}V_1 + q_{i2}V_2 + \ldots + q_{im}V_m \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

(V. Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme,* § 87.)

La forme quadratique

$$\sum\sum q_{ik}x_ix_k$$

est positive. Le coefficient positif q_{ii} est la capacité du conducteur A_i tandis que q_{ik} est un coefficient d'électricité induit et négatif.

Le système (β) rentre donc dans le type des équations (1), et d'après notre corollaire les coefficients du système (α) sont donc tous positifs, ce qui est bien connu et ce qu'on établit directement à l'aide de la théorie du potentiel.

Mais le système (β) n'a pas la même généralité que le système (1) car on a entre les coefficients q_{ik} les relations

$$q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{im} \geqq 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

tandis que dans le système (1) on n'a pas nécessairement les relations correspondantes entre les a_{ik}.

Mais aussi dans le système (α) les p_{ik} ne sont pas seulement positifs, la théorie du potentiel montre qu'on a en outre

$$p_{ii} \geqq p_{ik}.$$

D'après cela il est fort probable que si l'on assujettit dans le système

(1) $$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m = \xi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

les coefficients a_{ik} à ces conditions additionnelles:

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im} \geqq 0,$$

il en résultera pour les D_{ik} la conséquence

$$D_{ii} \geqq D_{ik}.$$

C'est ce que nous allons prouver en effet.

9. Supposons d'abord

$$s_i > 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

alors on a

$$D_{ii} > D_{ik}. \qquad (i \gtrless k)$$

Il suffira évidemment de faire voir que $D_{11} > D_{12}$. A cause de

$$Dx_1 = \xi_1 D_{11} + \xi_2 D_{21} + \ldots + \xi_m D_{m1}$$

cela revient à montrer que pour

$$\xi_1 = +1, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_i = 0 \qquad (i > 2)$$

la valeur de x_1 tirée du système (1) est positive. Or on a:

$$\sum_1^m \xi_i = 0 = \sum_1^m s_i x_i,$$

$$\sum_1^m x_i \xi_i = x_1 - x_2 = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

d'où l'on conclut d'abord que les x_i ne peuvent pas être tous nuls ou négatifs, ou bien tous nuls ou positifs et ensuite

$$x_1 > x_2.$$

Donc si x_1 était nul ou négatif, x_2 serait négatif. Supposons donc que

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \qquad (m > n \geqq 2)$$

soient nuls ou négatifs, et

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$$

positifs.

On devrait avoir

$$\sum_{n+1}^{m} \xi_i x_i = 0 = \sum_{1}^{n} x_i (a_{n+1,i}\, x_{n+1} + \ldots + a_{mi} x_m) + \sum_{n+1}^{m} \sum_{n+1}^{m} a_{ik} x_i x_k$$

ce qui est impossible car le second membre est positif. On a donc nécessairement $x_1 > 0$ ou

$$D_{11} > D_{12}.$$

C. Q. F. D.

Il est clair maintenant que dans le cas

$$s_i \geqq 0$$

on doit avoir nécessairement

$$D_{ii} \geqq D_{ik}$$

car un changement infiniment petit des a_{ik} suffit pour rentrer dans le cas $s_i > 0$.

10. Cherchons encore les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$D_{11} = D_{12}.$$

D'après ce qui précède il est clair qu'au moins un des s_i doit être nul mais cela ne suffit pas.

En prenant comme tout-à-l'heure

$$\xi_1 = +1, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_i = 0 \qquad (i > 2)$$

la condition $D_{11} = D_{12}$ revient à $x_1 = 0$, et les inconnues $x_2, \ldots, x_m$ se trouvent déterminées par le système

$$(1') \qquad \left| \begin{array}{l} a_{22} x_2 + \ldots + a_{2m} x_m = -1, \\ a_{32} x_2 + \ldots + a_{3m} x_m = \quad 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mm} x_m = \quad 0. \end{array} \right.$$

Deux cas sont à distinguer.

I. La forme

$$\sum_2^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k$$

ne se décompose pas directement dans la somme de deux formes quadratiques d'un nombre de variables moindre que $m-1$.

Alors $x_2, x_3, \ldots, x_m$ seront *négatifs,* d'après ce que nous avons vu dans le N° 1. Et comme on a:

$$\sum_1^m \xi_i = 0 = s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m$$

on en conclut

$$(a) \qquad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_m = 0.$$

Réciproquement, si ces relations (a) se trouvent vérifiées, il est clair que le système (1) donnera $x_1 = 0$ ou $D_{11} = D_{12}$ car on trouve

$$s_1 x_1 = \sum_1^m \xi_i = 0$$

et s_1 n'est pas nul.

II. La forme

$$\sum_2^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k$$

se décompose directement dans la somme de deux ou de plusieurs formes quadratiques.

Alors les variables

$$x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_m$$

se décomposent en plusieurs groupes. Soit

$$x_2, x_3, \ldots, x_n$$

le groupe dans lequel se trouve x_2.

Le système (1') se décompose en deux systèmes relatifs aux deux groupes de variables

$$x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

$$x_{n+1}, \ldots, x_m$$

et on voit qu'on aura:

$$x_2 < 0, \quad x_3 < 0, \quad \ldots, \quad x_n < 0,$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0.$$

La relation

$$0 = s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m$$

permet donc de conclure:

(b) $$s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_n = 0.$$

Réciproquement, si les conditions (b) sont vérifiées et qu'en outre on a identiquement:

$$\sum_2^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k = \sum_2^n \sum_2^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m \sum_{n+1}^m a_{ik} x_i x_k$$

alors le système des valeurs de x_2, x_3, .., x_m tirées des équations (1'), joint à la valeur $x_1 = 0$, satisfait au système (1) et l'on a par conséquent $D_{11} = D_{12}$. Pour le montrer il suffit évidemment de vérifier la première des équations (1), ou bien l'équation obtenue en prenant la somme des équations (1). Or cette dernière

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_m x_m = 0$$

se trouve vérifiée évidemment.

Nous avons supposé ici $n < m$, pour $n = m$ on rentre dans le premier cas; et l'on a le résultat suivant.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$D_{11} = D_{12}$$

consistent dans ce que, pour une valeur spéciale de n

$$2 \leq n \leq m$$

on ait

$$\text{(I)} \qquad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \ldots, \quad s_n = 0$$

et

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} & a_{2,n+1} = a_{2,n+2} = \ldots = a_{2,m} = 0, \\ & a_{3,n+1} = a_{3,n+2} = \ldots = a_{3,m} = 0, \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & a_{n,n+1} = a_{n,n+2} = \ldots = a_{n,m} = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas $n = m$ les conditions (II) disparaissent.

11. Supposons les conditions (I) et (II) remplies, il n'est pas permis de conclure que les valeurs de $x_2, \ldots, x_n$ sont négatives, car la forme

$$\sum_2^n \sum_2^n a_{ik} x_i x_k$$

pourrait encore être décomposable. Mais si cela eut lieu, il est clair que les conditions (I) et (II) seraient encore satisfaites pour une valeur plus petite du nombre n.

Si donc nous supposons que n soit *le plus petit* nombre pour lequel les conditions (I) et (II) sont satisfaites, on aura

$$x_2 < 0, \quad x_3 < 0, \quad \ldots, \quad x_n < 0,$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$$

et à cause de

$$D x_i = D_{1i} - D_{2i}$$

nous pouvons donc ajouter:

la condition $D_{11} = D_{12}$ entraîne nécessairement les relations

$$D_{1i} < D_{2i} \quad \text{pour } i = 2, 3, \ldots, n.$$

$$D_{1i} \qquad D_{2i} \quad \text{pour } i > n.$$

Note.

Après avoir terminé la rédaction de cet article, je viens de prendre connaissance d'une note *Sur les racines de certaines équations* par M. A. Markoff, (Mathematische Annalen, T. 27, p. 177). L'auteur y déduit d'abord la limitation des racines de l'équation $X_n = 0$ déjà obtenue par M. Bruns, et ensuite il obtient aussi et pour la première fois, la limitation plus étroite (B).

La démonstration que j'ai donnée est différente de celle de M. Markoff, mais une seconde démonstration à laquelle j'ai fait allusion seulement dans le N° 5, ne diffère pas au fond de celle de cet auteur.

Toulouse, Janvier 1887.